H. ワイル

リーマン面

田村二郎訳

岩波書店

リーマン面

リーマン面

H. ワイル著
田村二郎訳

岩波書店

DIE IDEE DER RIEMANNSCHEN FLÄCHE

by Hermann Weyl

Originally published in German by
B. G. Teubner, Stuttgart, 1913.

枢密院顧問官教授

フェリックス・クライン博士に

感謝と尊敬をこめて捧げる

緒言および序文

この書物は私が1911/12年の冬学期にゲッチンゲン大学において行なった講義の主な内容を再現したものである；この講義の最終的な目標は，厳密性に関する現代的要求をすべて完全に満たす形で，リーマンの関数論の基礎理念を展開することにあった．このような厳密な記述，とりわけまた，関数論のなかに入りこむ位置解析の主要な概念と定理を基礎づけるにあたって，直観的な明白さに訴えることなく，集合論的に厳密な証明を与える記述は今までにない．ここに成しとげられるまで残されていたこの学問上の仕事が，業績として特に高く評価されることはおそらくないであろう．それでもなお，私はあらかじめ与えられた目標に達する最も単純な，最も適切な方法を真剣かつ誠実に探求し，またその際多くの場所において，“アーベル積分に関するリーマンの理論”について述べたC. Neumannの古典的な書物(1865)が現われて以来，文献のなかで一つの伝統をつくっている道とは異なる道を進まなければならなかった——これだけは確かにいえると信ずる．この際，引用文から察せられるよりもはるかに多く，ここ数年間に発表されたB r o u w e rの基本的な位相幾何学的研究——彼の思考の鋭さ，その集中度には驚嘆せざるを得ない——によって助けられた；この研究者の著作に生気を与えている精神の幾分かが，この私の書物のなかにも息づいていることをひそかに望むものである．

曲線という観念は，われわれの感覚的な直観のなかに与えられたものとして存在するように見える；概念上の規定を行なうことなく，この観念をそのままとり上げ，この観念に即すれば或る種の直観的な明瞭さによってわれわれに押しつけられる諸性質(たとえば，一つの曲線は二つの岸をもつという定理)を素朴に利用することは，リーマン面の理論に関するすべての著述において，かつては普通に行なわれていたし，私の見る限りでは，現在に至っても普通に行なわれている．しかし今日ではもはや疑う余地が全くないように，“直観的な明瞭さ”によって，当面の真理に対する証明——それは最終的に数論の公理によってささえられる——を与えることの必要性がとり除かれるものでは決してな

い；少なくとも上記の流動的な直観が，（精密科学としての数学の進展が必然的にもたらすように）一般的，抽象的概念に拡張され，そのなかでいわば凝固するときには，ただちにこのような証明が必要となる．いずれにせよ，“連続曲線”という数学上の一般概念が多くのものを隠しており，われわれが自分たちの直観のなかに，それに対応するものを見いださないことは確かである．また，リーマンの関数論において基礎形体（曲線および曲面）を構成する“点”が普通の意味における空間の点ではなく，任意の異なる種類の数学的な対象（たとえば関数要素）でありうる以上，ここで問題となる位相幾何学的な概念と定理に対する厳密な集合論的基礎づけは，それだけ一そう必要とされる．——そして，曲線の一般的な概念が必然的に伴う困難を特殊化によって避けるために，連続的に微分可能な曲線または解析曲線，あるいはさらに折れ線に制限することも，位置解析のなかでは確かに許されない手続きである；なぜなら，この部門では両側から一意連続な任意の点変換によって不変に振舞うような曲線概念が要求されるからである．

一方において，“関数”，“曲線”などのような概念の一般性，われわれのあらゆる観念をはるかに越えて拡がる一般性の発見，他方において論理的な厳密性への要求，これらはわれわれの学問にとって有益であり，必要でさえあったとしても，なおかつ今日の数学の発展のうちに，或る不健全な現象をひき起こしたことは否定できない．これらの概念を追ってその最終的な精緻さと——歪曲に至るまで辛苦し，あるいはこれらを最も広い輪郭でとらえようとする数学的創造の一部は，あるいは虚空に発散し，あるいは脇道に漏れ失せ，生き生きとした学問の流れとの関連を失なってしまった．リーマン面の理念もまた，厳密さに関する現代のきびしい要求に従おうとすれば，その表現のために多量の抽象的な，微妙な概念と思考とを要求する．しかしながら，この論理の糸によってきめ細かく織り上げられた全体系が（初学者はそのなかであるいは道を見失うこともあろうが），ここでは根底において決定的なものでないことを認識するには，多少とも鋭い洞察を加えれば足りる：それは単なる<u>網</u>であり，この網を使ってわれわれは，本質において単純であり偉大であり崇高である<u>本来の理念</u>を，プラトンの表現によれば *τόπος ἄτοπος**) のなかから——海のなかか

*)（訳注） 場所なき場所．

ら真珠を採るように——われわれの悟性界の表面にとり出すのである．しかしながら，この精緻なそして煩瑣な諸概念の編みものに包まれた核心——これこそ理論の生命，真の内容，内的な価値をつくるものである——をとらえること，それに対して書物は(また教師でさえも)ただ貧弱な暗示を与えうるに過ぎない；ここでは各個人が毎回新たに，みずから理解を求めて格闘しなければならないのである．

いまもなおそこここで，リーマン面は関数の多意性を眼の前に描き出し，直観に訴えるための"画像"，(人はこうつけ加える：きわめて価値のある，きわめて示唆に富む)手段以上の何ものでもないかのような解釈に出会う．この解釈は根底から誤っている．リーマン面はこの理論に欠くことのできない実質的な構成部分であり，そのままこの理論の基礎である．それはまた，経験により多かれ少なかれ技巧的に解析関数から蒸溜された何ものかではなく，あくまでもそれ以前のもの，母なる大地，その上にこそはじめて諸関数が生育し繁茂しうる大地とみなされなければならない．リーマン自身がその表現の形式を通じて，関数のリーマン面に対するこのような真の関係をいくらかぼかしていることはもちろん認められる——おそらくはただ，彼が同時代の人々にあまりにも異様な観念を強いたくないと考えたからであろう；この関係がぼかされているのは，彼が例の多葉な，いくつかの分岐点とともに平面の上に拡がっている被覆面，今日もなお話題がリーマン面に及ぶとき，人々がまず第一に思い浮かべる面について語っており，(その後 クライン によってはじめて展開され，見とおしのよい明瞭さに達した)一そう一般的な観念を用いなかったことにもよる； この観念の特徴として，そのなかでは一つの独立な複素変数の平面に対する関係ばかりか，三次元の点空間に対する関係も原理的に解決されているということが挙げられる．ともあれ，クラインの解釈においてリーマンの基本思想ははじめてその自然な単純さにおいて，潑溂確固たる力にあふれてその真価を発揮する；このことについては全く疑う余地がない．この確信に基づいて本書は書かれた．

個別的に整理すれば，その内容はつぎの通りである．第I章でとり扱われることは三つある：

1. リーマン面の理念に対するワイヤストラスの“解析関数”および“解析形体”の概念の関係を正確に説明すること (§§ 1-7)；

2. 一般的な面の概念, 特にリーマン面の概念を厳密に規定すること (§§ 4-7);

3. リーマンの関数論を建設するために際限なく必要とされる位置解析の諸定理を厳密に基礎づけること (§§ 8-11). この位相幾何学的考察においては, 一意化の理論に対してきわめて重要な被覆面の概念が, 通常これに割り当てられているよりもはるかに大きな役割を演ずる(そして, これは正当であると信ずる).

第II章の対象を構成するものは何よりもまずリーマンの関数論の基本問題, すなわち与えられたリーマン面に対して, これに属する関数を見いだすこと, 特に閉じたリーマン面の場合にこれを見いだすことである. ここで存在定理の証明は, リーマン自身が計画したように, いわゆるディリクレの原理を使って行なわれる (§§ 12-15). この道が通行可能であることを示したのはよく知られているように ヒルベルト である; かつては明らかであるとみなされながら, のちにワイヤストラスによって論難されたディリクレの最小値の原理を, 彼は確実な証明によってささえたのである. 他の著作者たちの, ヒルベルトに結びついている仕事とともに, 著者によって得られた未発表の補題, リーマンやヒルベルトに比べて本質的に単純化された補題を考慮することによって, この証明の手続きにごく見とおしのよい形を与えることができた; それは, これまでの教科書に記載されているただ一つの方法, すなわち Schwarz と C. Neumann によって考案された交互処理の方法より簡明さの点で優れているとはいえないにしても, これに匹敵するものになっている. その適用範囲の広さは, これを開いたリーマン面に適用するとき修正を施す必要がないということによって確証される; この事情は何よりも一意化の理論にとって都合がよい. ついで §§ 16-18 においては存在定理につながる閉じたリーマン面上の関数の系統的な理論の概要を述べるが, この理論については, リーマンの基本理念の関数論における豊かな創造性を明らかにし, 位置解析に由来する示性数が関数の王国において演ずる支配的な役割を示すのに必要な限度にとどめる. この際私は慣習に反して, 本来は存在定理の証明から生じたアーベル積分の標準化をそのまま保存した; この場合は実部と虚部を互いに分離しなければならないが, こ

の標準化はリーマン面の各切断に無関係であるという利点をもつからである．最後の数節(§§19-21)は，クライン と ポアンカレ によって大胆な輪郭が描かれ，Koebe がごく若い時代に広汎な基礎を築いた一意化の理論に当てられる．これによってわれわれは一つの神殿に足を踏み入れる；そこは神性(この比喩を用いることが許されるならば)が個別的な具象化という地上の束縛から本来の姿に立ち帰るところである：2次元の非ユークリッド結晶という象徴のなかに，(可能な限り)純粋な，あらゆる混濁と偶然の性質から解放されたリーマン面そのものの原初的な姿を看取することが可能となる．それゆえ，一意化の理論の決定的な諸結果もまたこの書物のなかにはいったのは当然のことであった．

原稿を書き直すにあたって，当地の数学図書室のために Frankfurther 氏によって作製された私の講義録は非常に役立った；氏の細心で献身的な仕事に対して，私はここでもまた Frankfurther 氏に心から感謝の念を表明したいと思う．あの講義にはここに再現された内容のほか，楕円関数論の概要が含まれ，代数関数についてのはるかに整った記述が展開され，また，リーマン-ワイヤストラスによるヤコビの逆問題の解決が ϑ 級数を用いて示されていた．いまこれらの事項を除外したのは，リーマン面の理念に対してこれらが基本的な重要性をほとんどもたないからである．また心残りではあったけれども，リーマンの関数論的な立場から，Clebsch, Brill および Noether の曲線論的解釈へ向かって橋を架けることも私は断念した；しかしいろいろな方向へ進む読者のために，特に引用文を通じて，参考文献への道を開き，読者がそのなかから，これらについても，またリーマンの理論の多方面にわたる他の発展についても情報を見いだすように配慮しておいた．引用文は同時に，もちろん完全ではなく，輪郭の整ったものでもないが，この重要な関数論の分野を支配する指導理念の歴史を含んでいる．

新しく用語をつくること，私がこれをみだりに行ない過ぎていると思われるかもしれない．すでに市民権が与えられている術語を動揺させてはならないという原則に関しては，私がこれを犯したところは一つもないと信ずる．しかしこの点を越えれば，読者に提供しようとする材料に対して，その性格によって定まる構成と，それにふさわしい適切な表現を与えることは，すべての著者の

権利であるばかりでなく，義務である――彼の書物が全体として何ものかを意味するだけの内容をともかくももつとすれば――と私は思う．このことから，個々の節の内容を手短かに見渡したい人たち，あるいはそれを他の著作の考え方と対比したい人たちに対しては，多少の不便が生ずることもあろう．しかし新しい概念を導入したところではその呼び名をゴシック体で目立つようにしたことにより，また本書の最後の数ページにある詳しい事項索引によって，私が望むところでは，見とおしをよくするに足りる配慮も払われているであろう．

実質的な予備知識について私は多くを仮定する必要がない；確かにそれは，たとえばよく知られた Osgood の Lehrbuch der Funktionentheorie(第2版, B. G. Teubner, Leipzig, 1912) の第1巻に含まれる範囲を出ない；私は，多葉なリーマン面の最も簡単な例と群論の記号的表現に読者が通じていることを仮定する．しかしながらまたこの書物は，私の信ずるところでは，少なからぬ量の抽象数学的訓練を必要とする；見掛けの上では複雑な概念構成と思考過程のかなたに，内容的には簡明な基本思想，全体がそこに集中している思想を決して見失わないことに熟練していなければならない．

これらの基本思想のうちでも最も重要なものは，リーマンの創造に直接由来するものを除けば，ひとりの人に発する；その人に私は誠実な，心からの尊敬をこめてこの本を捧げなければならない．枢密院顧問官クライン先生は，他のお仕事による過重な負担にもかかわらず，また思わしくない健康状態にもかかわらず，私とのたび重なる口頭の談話のうちに，すべての素材について詳しく討論することを決してやめられなかった；先生の御注意に触発され，私は多くの個所で，私のもとの表現をもっと正確な，もっと適切なものにかえることができたのである；これらの御注意に対して先生に最大の感謝を表わすのは私の義務である．いろいろな種類の改善案と校正における助力に対して，私はさらに私の友人たち，Koebe, Groß, Bieberbach および Weitzenböck の諸氏に心から感謝しなければならない．以下の本文において，私があるいは新たに示しうる事がらのうち，どれだけ多くが Koebe とのかつての会話にさかのぼるかは，今となってはもはや私も決定することができない．Groß 博士は (校正の際，言葉に尽くしえないほど注意深く私を助けてくれた人であるが) 1911/12 年冬学期の，リーマンの関数論に関する私の講義には聴講者のひとりとして加わり，

印刷のためこれに手を加えようという提案は，そもそも最初彼から出されたものである．終わりにあたって，B. G. Teubner 書店は，ここにでき上った本の組版と装幀につき綿密な注意を払われた；広く世に知られたこの綿密さに対して，私は感謝の意を表する．

Göttingen, 1913 年 4 月

ヘルマン　ワイル．

凡　　例

1. この本は

Hermann Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 初版, 1913
の邦訳である．原書名その他については‘訳者のあとがき’を参照されたい．

2. 訳文は初版に従い，初版巻末に示された正誤表によって本文を正した．またその他の個所においても，小さな誤植とみられるものは，一々これを注記しなかった．

3. ‘訳注’は最少限にとどめたが，第2版巻末の‘訂正と補注’はそれぞれ該当するページの脚注とし，そのことを明記した．

4. 原文のゴシック体の語は訳文でもゴシック体とし，イタリック体の部分はアンダーラインによって表わした．また原文において活字の間隔がひろげられている個所は，訳文でもこれに従った．

5. 原文の引用符 „ “ は慣用の “ ” に改めたが，‘ ’は訳文だけのものである．また数学の記号もわずかではあるが慣用のものに改めた．

6. 広く知られている人名(リーマン，ポアンカレなど)が本文のなかに現われる場合はカナ表記とし，その他は原文の表記に従った．ただし数学用語とみなされるもの(シュワルツの不等式など)はこの限りでない．

7. 事項索引に選ばれている語も原書のとおりである．その利用法については‘緒言および序文’(xii ページ)を参照されたい．

訳　　者

目　　次

第I章. リーマン面の概念とその位相.

§1. ワイヤストラスの解析関数の概念.

z は複素変数であり，a は一つの決まった複素数であるとき，$z-a$ の正の整数ベキによって展開された級数

(1) $$\mathfrak{P}(z-a)=A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots$$

のうち，$z=a$ 以外についても収束するものはいずれも，ワイヤストラスに従って **a を中心とする関数要素**と呼ばれる．この条件さえ満たされていれば，係数 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ は任意の複素数であってよい．このようなベキ級数の収束域は全複素 z 平面から成るか，または一つの決まった円すなわち“**収束円**”の内部 $|z-a|<r$ $[r>0]$ と，この円の周 $|z-a|=r$ 上にある点の一部分[1)]から成る．

収束円の内部で(場合によっては全平面もまた半径 $r=\infty$ の円とみなすことにする)，このような関数要素はコーシーの意味で正則な解析関数を表わす．逆に，関数論の初歩から知られるように，点 a の近傍 $|z-a|<r$ における一意の正則-解析的な関数は，この近傍がこの解析関数の正則領域にすっかり含まれているとき，この近傍で収束するベキ級数(1)に展開される．もちろんこのときベキ級数によって表現されたものは，この関数の全域のうち，円形の一切片に過ぎない．

ベキ級数から出発するとき，われわれの意図するところは，ベキ級数(1)により最初は収束円の内部だけで与えられている解析関数の定義を，z 平面のもっと広い領域に拡張し，しかもこの拡張にあたって関数の解析的性格を失わないようにすることでなければならない．そのための手段はワイヤストラスの解析接続の原理である[2)]．定義しようとしている解析関数に対して，z 平面ので

1) ここで(一つの集合の)“部分”という語を使うときには，その集合自身も(元を一つも含まない)“空集合”もこの概念のうちに含まれるものと理解する．

2) Weierstraß の Mathematische Werke, 第1巻(1894)にはじめて公表され，1842年に著わされた “Definition analytischer Funktionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer

きるだけ広い領域を獲得しようという計画は，ただ一つの仕方でだけ達成されるということが示される．しかしながら関数の一意性は解析接続の過程で一般に失われてゆく．このことのなかに短所を認めたりしてはならない；それどころか，このようにして多意の解析関数についても厳密な取り扱いが可能になるということは大きな長所である．

b が収束円の内部 $|z-a|<r$ に属する z の値の一つであるとき，級数(1)を $z-b$ のベキによって展開し直せば，よく知られたように新しいベキ級数

$$\mathfrak{Q}(z-b) = B_0+B_1(z-b)+B_2(z-b)^2+\cdots \tag{2}$$

ができ，これは少なくとも円 $|z-b|<r-|b-a|$ のなかで収束する；しかしこれの収束円が $r-|b-a|$ より大きな半径をもつということも，もちろんありうる．いずれにせよ(1)と(2)の収束円に共通な領域では両者の値が一致するから，この場合は(2)によってわれわれの解析関数の定義がもとの範囲を越えて拡張される．(2)は(1)の**直接解析接続**であるということにしよう．(間接)**解析接続**という一般的な手続きは，直接解析接続の手続きをただ一回に限らず，任意の有限な回数だけつづけて適用することにある——この方法は射影幾何学において一般の射影写像を定義するときとほぼ同様である：それは任意個数の直接射影写像，すなわち配景写像をつづけて施すことである．

与えられた曲線 $\mathfrak{c}$ に沿って解析接続を行なうこともできる．それはつぎのことをいうのである．点 $z=a$ から始まる一つの曲線が与えられているとしよう；すなわち区間 $0\leqq\lambda\leqq1$ に属する実数 λ の一つ一つに複素 z 平面の点 z_λ が連続的に対応しており，特に $\lambda=0$ には点 $z_0=a$, $\lambda=1$ には或る点 $z_1=c$ が対応するものとする．さらに，パラメータ λ の値の一つ一つには，中心 z_λ をもつ関数要素 $\mathfrak{P}_\lambda$ もまた一つずつ対応しているとする；$\mathfrak{P}_0$ は与えられた関数要素(1)であるとし，その上つぎの条件が満たされているとする：λ_0 は λ の任意の一つの値であり，$\mathfrak{c}'$ は $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$ の収束円の内部にすっかり含まれるような $\mathfrak{c}$ の任意の部分弧(ただし $|\lambda-\lambda_0|\leqq\varepsilon$ という形の不等式によって定められるもの；ε は正の定数)であるとき，この不等式を満たす λ の値に対する関数要素 $\mathfrak{P}_\lambda$ は，

Differentialgleichungen" に関する論文，特に 83–84 ページ；さらに Riemann の "Theorie der Abelschen Funktionen" (1857) の最初の数ページ [全集，第 2 版，88–89 ページ]．Enzyklopädie II B 1 (Osgood の著書)，Nr. 13 を参照．

すべて $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$ から直接接続によって生ずる．このとき，さきに与えられた要素(1)を c に沿って解析接続することができるといい，$\mathfrak{P}_1$ は中心 c をもち，c に沿う解析接続によって(1)から生ずる関数要素と呼ばれる．このときは逆に，c を反対の向きにたどる曲線に沿って解析接続することによって，$\mathfrak{P}_1$ から要素 $\mathfrak{P}_0$ が出て来る．

与えられた曲線 c に沿う解析接続は，ともかくできるとしても，ただ一通りの仕方でしか可能でない．実際，二つの異なる解析接続

$$\mathfrak{P}_\lambda, \quad \mathfrak{P}_\lambda^*$$

があるとして，λ の値のうち，対応するベキ級数 $\mathfrak{P}_\lambda, \mathfrak{P}_\lambda^*$ が一致しないような値をすべて考え，その下限を λ_0 としよう．$\mathfrak{P}_{\lambda_0}, \mathfrak{P}_{\lambda_0}^*$ は両方とも円 $|z-z_{\lambda_0}|<r_0$ のなかで収束すると考えてよい．このとき，$|\lambda-\lambda_0|\leqq\varepsilon$ の形の不等式によって c 上に一つの弧 c_0 を切り取り，z_{λ_0} を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}r_0$ の円のなかにこの弧がすっかり含まれるようにすることができる．この弧の各点に属する $\mathfrak{P}_\lambda, \mathfrak{P}_\lambda^*$ は $\mathfrak{P}_{\lambda_0}, \mathfrak{P}_{\lambda_0}^*$ から直接解析接続によって生じ，またさきの不等式を満たす λ の値のうちには，$\mathfrak{P}\neq\mathfrak{P}^*$ となるものが存在するから，$\mathfrak{P}_{\lambda_0}\neq\mathfrak{P}_{\lambda_0}^*$ でなければならない．それゆえ $\lambda_0=0$ となることはできない．そこで一つの値 λ_1 を，>0 かつ $>\lambda_0-\varepsilon$，しかし $<\lambda_0$ のようにとれば，$\mathfrak{P}_{\lambda_0}, \mathfrak{P}_{\lambda_0}^*$ は $\mathfrak{P}_{\lambda_1}=\mathfrak{P}_{\lambda_1}^*$ から直接解析接続によって生ずる．これは矛盾である．このことから特に，最後に得られる要素 $\mathfrak{P}_1$ は，出発点の要素と接続の曲線によって一意的に定められることが示される．

つぎにわれわれが考えなければならないのは，直接解析接続を有限回適用することによって——このときに現われる要素の中心は曲線 c の上に順々に並んだ点である——始めの要素から終りの要素に到達することができるということである．実際，関数要素 $\mathfrak{P}_\lambda$ の一つが収束半径 $r=\infty$ をもつときには，同じことがまた他のすべての要素に対して，特に出発点の要素に対しても当てはまり，それから終りの要素は，直接解析接続を一回適用するだけで得られる．そうでない場合には λ の一つ一つに $\mathfrak{P}_\lambda$ の有限な収束半径 r_λ が対応する．λ_1 がパラメータ λ の任意の一つの値であるとき，λ が λ_1 と十分わずかしか違わない限り，

$$|r_\lambda-r_{\lambda_1}| \leqq |z_\lambda-z_{\lambda_1}|$$

となり，その結果 r_λ は連続的に λ $(0\leqq\lambda\leqq1)$ に依存するといいたい．事実，$\lambda_2(>\lambda_1)$ を λ_1 の近くにとり，z_{λ_1} を中心とする半径 $\frac{1}{2}r_{\lambda_1}$ の円の内部に曲線弧 z_λ $(\lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2)$ がすっかり含まれるようにすれば，$\mathfrak{P}_{\lambda_2}$ は $\mathfrak{P}_{\lambda_1}$ から直接解析接続によって得られ，したがって

$$r_{\lambda_2}\geqq r_{\lambda_1}-|z_{\lambda_2}-z_{\lambda_1}|$$

である．一方，弧 z_λ $(\lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2)$ は $\mathfrak{P}_{\lambda_2}$ の収束円のなかにもすっかり含まれるから，逆に

$$r_{\lambda_1}\geqq r_{\lambda_2}-|z_{\lambda_1}-z_{\lambda_2}|$$

も成り立つ．こうして証明された連続性から，r_λ は<u>正の</u>最小値 r^0 をもつことがわかる．そこで $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n=1$ という値を細かく選んで，$\lambda_h\leqq\lambda\leqq\lambda_{h+1}$ に対してはつねに $|z_\lambda-z_{\lambda_h}|<r^0$ $[h=0,1,\cdots,n-1]$ となるようにすれば，列 $\mathfrak{P}_{\lambda_0}, \mathfrak{P}_{\lambda_1}, \cdots, \mathfrak{P}_{\lambda_n}$ において各関数要素が一つ前のものから直接解析接続によって得られる．

曲線 $\mathfrak{c}$ に沿う始めの要素の接続が不可能であるときには，この曲線上に“**臨界点**”とよばれる一つの決まった点が現われ，接続の手続きはここで必ず限界に達する．もっと正確に定式化すれば，つぎのような一つの境目 $\lambda=\Lambda_0$ が存在する：$\lambda_0<\Lambda_0$ ならば，部分曲線 $z=z_\lambda$ $(0\leqq\lambda\leqq\lambda_0)$ に沿う解析接続の手続きは実行されるが，$\lambda_0=\Lambda_0$ からさきは実行されえない．もちろんこの際 $\Lambda_0=1$，すなわち $\mathfrak{c}$ の終点がはじめて臨界点になることもありうる；これに反して $\Lambda_0>0$ はつねに成り立つ．

解析接続についてはもう一つ重要な定理がある．二つの曲線

$$z=z_1(\lambda),\qquad z=z_2(\lambda)$$

が同じ点 $a\{=z_1(0)=z_2(0)\}$ から同じ終点 c に至り，そのあいだいつも互いに十分近くにあるとき，解析接続が第一の曲線に沿って実行されるならば，第二の曲線に沿っても行なわれ，同じ終りの要素を与える．両曲線がいつも互いに十分近くになければならないという条件は，つぎのことを意味する：或る正の数 δ が存在して，すべての λ に対して不等式 $|z_1(\lambda)-z_2(\lambda)|<\delta$ が満たされるときには，われわれの定理の主張が正しい．この証明は，直接解析接続の手続きを有限回適用することによって，始めの要素から終りに現われる要素を得ることができるという事実から，ただちにわかる．

ここまで来ればワイヤストラスによる解析関数の一般的な定義をつぎのように述べることができる：解析関数とは，与えられた一つの関数要素から解析接続によって生ずるすべての関数要素の集まりGである.

Gの各関数要素はGの他の各関数要素から解析接続によって得られる.

二つの解析関数 G_1, G_2 が関数要素を一つでも共有することが証明されたならば，両者は同じものである；すなわち G_1 の各要素は G_2 に含まれ，逆も成り立つ.

$$\mathfrak{P}(z-a) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots$$

がGに属する関数要素であるとき，数 A_0 を点 $z=a$ における解析関数Gの一つの値という.

確かに，多意の解析関数を関数要素の集まりとしてとらえるワイヤストラスの解釈には，一見したところ何か技巧的なものがある．$\sqrt{z}$ や $\log z$ について語るとき，これらの多意関数の断片を表わしうるベキ級数の全体を思い浮かべることはまずないであろう．しかしそれにもかかわらずこのワイヤストラスの定義は——その簡明さと精密さを認めないわけにはゆかない——解析関数論に対する確かな出発点であることが実証される．以下においてわれわれはワイヤストラスの解釈に少しずつ手を加えてリーマンの解釈に到達するであろう；そこでは独立変数 z も，それまで関数要素の全体Gによって表わされる従属変数 u も一つのパラメータの一意解析関数として現われる；このパラメータはもちろん一般には一つの複素平面のなかではなく，或る二次元の多様体，いわゆるリーマン面の上を動くものである.

しかしさしあたってはワイヤストラスとともに，解析関数の概念を解析形体(analytisches Gebilde)の概念まで拡張しなければならない.

§2. 解析形体の概念.

一つの解析関数から解析形体を得るためには，これまでのようにこの関数が正則に振舞うようなところだけでこの関数を考えるのではなく，それが有限位数の分岐点または極を(あるいは同時に両者を)もつようなところをもつけ加えるのである．解析形体の概念の厳密な定式化は，これまでの関数要素の概念を

適切な形に拡張するときに得られる[1)].

関数要素(1)：$u=\wp(z-a)$は複素パラメータ t を使ってつぎのように書き表わされる：

$$z=a+t, \quad u=\wp(t)=A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots.$$

ここで z が演ずる特別な役割をとりやめ，その上になお t の有限な負のベキまで許すことによって，われわれは一そう一般的な定義に到達する：

$$z=P(t), \quad u=Q(t)$$

は t の整数ベキによって展開され，t の負のベキを有限個しか含まない任意の二つの級数であり，t 平面の原点の或る近傍 $|t|<r$ (r は正の定数)では，1) 両級数がともに収束し，2) この近傍に属する二つの異なる t の値に対して同じ値の対(つい)(z,u)を決して与えないものとする：このとき，このベキ級数の対は一つの**関数要素を定める**という．

われわれの意図するところは，“関数要素”という語の下にベキ級数対 $P(t)$, $Q(t)$ そのものを考えようというのではない；むしろこれら二つの級数はここでいおうとする関数要素の単なる一つの表現であり，同じ要素に対してこのほかにもなお無限に多くの表現が同じ権利をもつものとして許されると解釈するのである．このような一つの表現からもう一つの表現に移ることに関しては，つぎのわかりやすい規約を設ける．

$P(t)$においても $Q(t)$においても，パラメータ t を一つのベキ級数

$$t(\tau)=c_1\tau+c_2\tau^2+\cdots$$

に置き換えると，$P(t)$はベキ級数 $\Pi(\tau)$に，$Q(t)$は $K(\tau)$に移る．われわれは $t(\tau)$が $\tau=0$ の或る近傍で収束し，最初の係数 c_1 は $\neq 0$ と仮定する；こうすれば $\tau=0$ のまわりに，或る正の定数 ρ を使って一つの近傍 $|\tau|<\rho$ を限り，そのなかでは $t(\tau)$が，1) 収束し，その絶対値は $<r$ にとどまり，2) 二つの異なる τ の点ではつねに異なる二つの値をとるようにできる．このとき，この近傍 $|\tau|<\rho$ では Π と K もまた収束し，この近傍に属する二つの異なる点 τ_1, τ_2 では決して同時に $\Pi(\tau_1)=\Pi(\tau_2)$，$K(\tau_1)=K(\tau_2)$ とならない．対 Π, K はもとの対 P, Q に**同値**であるという；この際，置き換えられる級数 $t(\tau)$の係数 c_1, c_2,

1) Weierstraß, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten (G. Hettner と I. Knoblauch によって編集されたもの)，全集，第4巻，16–19 ページを見よ．

…は，級数を収束させ，$c_1 \neq 0$ である限り，どのようなものであってもよいとする．いま述べた仮定から導かれる結果として，$P(t)$，$Q(t)$ を $\Pi(\tau)$，$K(\tau)$ から逆に求めることができる；それには τ のところに t の或るベキ級数

$$\tau = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots \qquad \left(\gamma_1 = \frac{1}{c_1} \neq 0\right)$$

を代入すればよい．それゆえ同値の関係は相互的である．さらに各ベキ級数対がそれ自身に同値であることは明らかであり，また二つのベキ級数対が第三の対に同値ならば，それらはまた互いに同値である．これらの事実によって，同値なベキ級数対は同じ関数要素の表現であり，同値でない対は異なる関数要素の表現であると解釈するための根拠が与えられる．別のいい方をすれば：それぞれ一つずつ関数要素を定める二つのベキ級数対は，それらが同値であるとき，またそのときに限って同じ関数要素を定める．

ここでわれわれの議論の基礎となっている定義の方法は，数学においては他の場所でもしばしば利用しなければならないものであって，その心理的な根拠は抽象に対するわれわれの精神の能力にある．この定義の仕方はつぎの一般的な原理に基づく：或る一つの操作範囲に属する対象のあいだに，同値の特性をもつ関係～[すなわち，法則

1. $a \sim a$；2. $a \sim b$ ならば $b \sim a$；

3. $a \sim c, b \sim c$ ならば $a \sim b$

を満たす関係] が定められている場合には，もとの操作範囲に属する対象 a の一つ一つを或るもの α の代表とみなし，二つの対象 a, b が関係～の意味で同値であるとき，またそのときに限って，これらは同一のもの α の代表として現われるようにすることが可能である．特に対象 $a, b, \cdots$ においてわれわれの関心をひくものが，関係～によって変わらない性質だけであるとき，この原理はいつでも利用されよう．これを適用する結果，重苦しい表現がもっと簡潔なものに置き換えられ，研究の目標から定まる主要な見地にふさわしい表現となる；それはこの見地からすれば本質的でないものをすべて自然に研究の対象からはぎとることによる．ここではこの種の“抽象による定義”の例を二つ述べる．

1. 二つの平行な直線について，これらは同じ方向をもつといい，二つの平行でない直線について，これらは異なる方向をもつという．もとの対象(a)は

直線であり，同値の特性をもつ関係は平行性である；要求されているのは，各直線にその“方向”という或る一つのものを付属させ，直線の平行性には付属する方向の同一性を対応させることである.

2. (一つの点の)“運動”を与えるには，或る時間間隔 $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ に属する各瞬間 λ における動点 p の位置：$p=p(\lambda)$ を与えればよい．このような二つの運動 $p=p(\lambda)$，$q=q(\mu)$ があるとき，これらの運動が同じ“道”を通るというのは，つぎのような場合であり，この場合に限る：すなわち第一の運動の時間パラメータ λ が第二の運動の時間パラメータ μ の連続な単調増加関数 $\lambda=\lambda(\mu)$ として適当に定められ，これによって第一の運動が第二の運動に移る：$p(\lambda(\mu)) \equiv q(\mu)$．ここでは，上記の方法により定義しようとしているものは“道”という概念である[1].

話がわき道にそれたが，拡張された関数要素の概念に戻ろう．同じ一つの関数要素の同値なすべての表現のなかから，一つの決まった，できるだけ簡単なものを“正規表現”としてとり出してみよう．この際われわれはいくつかの場合を区別する．$P(t)$ が t の負のベキを含まず，すなわち

$$z = P(t) = a + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

であって，しかも $a_1 \neq 0$ であるときは，$z-a=\tau$ を新しい表現のパラメータとして導入し，同じ関数要素の新しい表現として

$$z = a + \tau, \qquad u = K(\tau) \tag{3}$$

を得ることができる．$Q(t)$ も負のベキを含まないときには K についても同じことが成り立ち，§1 で考えたのと同じ関数要素が現われる；いまこれらを区別するために**正則な関数要素**と呼ぶことにしよう．(3) は求める正規表現である．正則な関数要素はただ一つの正規表現しか許さない，それゆえ二つの正則な関数要素の正規表現が異なるときには，それらの要素は確かに異なる．これらの事情に基づいて，ここでの関数要素の概念を，§1 で基礎にとった概念の拡張と称することが，実ははじめて正当化される.

z の展開のなかに負の指数をもつ t のベキは現われないけれども，一そう一

1) この概念の意味するところは，運動のあいだに通過されるすべての点から成る点集合とは別のものである．ここで問題になっているのは，ひとりの歩行者が通り過ぎてゆく道(すなわち，歩行者が歩く限り，status nascendi [生成の状態] にある道)と，(ずっと以前から存在する)道，すなわちその上を歩行者が歩く道とのあいだにあるのと同じような相違である.

般に

$$z = a + a_\mu t^\mu + a_{\mu+1} t^{\mu+1} + \cdots \qquad (a_\mu \neq 0),$$

したがって定数項を除けば $a_\mu (\mu \geqq 1)$ が 0 と異なる最初の係数であるときは，t を τ のベキ級数として

$$t = c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \cdots \qquad (c_1 \neq 0)$$

とおき，しかも

$$z = a + \tau^\mu$$

とすることができ，

$$\text{(3*)} \qquad z = a + \tau^\mu, \quad u = K(\tau)$$

という形の表現を得る．実際：$\sqrt[\mu]{a_\mu}$ を一つの決まった μ 乗根とするとき，よく知られているように，初項 $\gamma_1 = \sqrt[\mu]{a_\mu}$ をもつベキ級数 $\gamma_1 + \gamma_2 t + \gamma_3 t^2 + \cdots$ のうち，その μ 乗が $= a_\mu + a_{\mu+1} t + \cdots$ となるものはただ一つ存在する．

$$\tau = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots$$

を t について解くことにより，求める結果が得られる．しかし μ 乗根 $\sqrt[\mu]{a_\mu}$ のどれをとるかによって，μ 個の異なる表現(3*)が得られる：1 の任意の μ 乗根を ζ とするとき，τ を $\tau \cdot \zeta$ に置き換えることによって，これらの表現のうちの一つからすべての表現が生ずる．

$$\text{(4)} \qquad z = a' + \tau^{\mu'}, \quad u = K'(\tau) \qquad [\mu' \text{ は正の整数}]$$

によって与えられる関数要素が(3*)によって表わされるものと同じになるのは，$a' = a$；$\mu' = \mu$ であって，置換 $\tau | \tau \cdot \zeta$ によって(3*)から生ずる μ 個の正規表現のうちの一つと，(4)がともかく係数ごとに一致するときに限る．それゆえ特に整数 μ は問題の関数要素に特有のものであり，その特殊な表現には無関係である；この要素は$(\mu-1)$**位に分岐して**いるという；さきに考えた $\mu=1$ の場合には，**非分岐**と呼ばれる．

z の展開のなかに t の負のベキが現われるときには，最低次のものを $t^{-\nu}$ とする：すなわち

$$z = a_{-\nu} \cdot t^{-\nu} + a_{-\nu+1} t^{-\nu+1} + \cdots \qquad (a_{-\nu} \neq 0)$$

とすれば，t を τ の収束ベキ級数 $t = c_1 \tau + \cdots \quad (c_1 \neq 0)$ に置き換え，

$$\text{(3**)} \qquad z = \tau^{-\nu} \quad \text{そしてこのとき} \quad u = K(\tau)$$

とすることができる．今度はこれが正規表現である；これも $\nu > 1$ のときには

要素によって一意的には決まらないで，ちょうどν個の異なる表現があり，1の任意のν乗根をζとするとき，τを$\tau\cdot\zeta$に置き換えることによって，これらのうちの一つからすべてが出て来る．ここでもまた$(\nu-1)$位の分岐についての話がなされる．

正規表現(3), (3*), (3**)を導き出す際に，われわれは§1の場合と同様に変数zをuよりも優先的に扱って来た．また，正則な関数要素と並んで非正則なものが，非分岐のものと並んで分岐するものが現われた．ここで直接および間接解析接続の概念を任意の(非正則なものをも含む)関数要素の上へ移すことによって，われわれは直ちに解析形体の定義に到達する．

$\mathfrak{e}$は一つの関数要素，

$$z=P(t),\quad u=Q(t) \tag{5}$$

はその任意の表現，$|t|<r\quad(r>0)$は或る一つの円であるとし，この円のなかで上記の表現は**有効**であるとする(すなわち，そのなかでは$P(t), Q(t)$が収束し，$t_1\neq t_2$, $|t_1|<r$, $|t_2|<r$に対して$P(t_1)=P(t_2)$, $Q(t_1)=Q(t_2)$が同時に成り立つことはないとする)．このとき$|t_0|<r$であるような各t_0に対し，級数$P(t), Q(t)$を$t'=t-t_0$のベキにより展開し直して，新しいベキ級数対$P'(t')$, $Q'(t')$をつくり，それによってまた新しい関数要素$\mathfrak{e}_{t_0}$を求めることができる．このように円$|t_0|<r$のなかにあるいろいろな点t_0に対する関数要素$\mathfrak{e}_{t_0}$の全体について，これらはもとの要素$\mathfrak{e}(=\mathfrak{e}_0)$の一つの**解析近傍**をつくるという；そしてこの呼び名は，パラメータtによる要素$\mathfrak{e}$の表現がどのように選ばれていても，また円$|t|<r$——このなかで上の表現が有効である——がどのように選ばれていても用いられる．上に述べた解析近傍，すなわち表現(5)と不等式$|t|<r$によって決定された解析近傍を，簡単な呼び方が望まれるときには，表現しているパラメータを考えに入れて，一つのt **近傍**と呼ぼう．

同じ関数要素$\mathfrak{e}$の二つの異なる表現：

$$z=P(t),\ u=Q(t)\ ;\text{および}\ z=\Pi(\tau),\ u=K(\tau)$$

(これらは

$$t=t(\tau)=c_1\tau+c_2\tau^2+\cdots\qquad[c_1\neq 0]$$

によって互いに移るものとする)があるとき，つぎの重要な定理が成り立つ：

<u>$\mathfrak{e}$の各t近傍は$\mathfrak{e}$の一つのτ近傍を含み，したがってまた逆に各τ近傍は一</u>

つの t 近傍を含む.

証明: t 近傍が $|t|<r$ により定められているとしよう. このとき適当な正の数 ρ を選んで, $|\tau|<\rho$ ではベキ級数 $t(\tau)$ が収束し, その絶対値は $<r$ にとどまり, 同じ値を二度はとらないようにする. この不等式 $|\tau|<\rho$ は一つの τ 近傍を定めるが, これについては, これがもとの t 近傍に含まれることをいおう. $\tau'=\tau-\tau_0$ $(|\tau_0|<\rho)$ のベキによって $\Pi(\tau), K(\tau)$ を展開し直せば要素 $\mathfrak{e}_{\tau_0}$ の表現 $\Pi'(\tau')$, $K'(\tau')$ が生じ, $t'=t-t_0$ $[t_0=t(\tau_0), |t_0|<r]$ のベキによって $P(t), Q(t)$ を展開し直せば要素 $(P'(t'), Q'(t'))=\mathfrak{e}_{t_0}$ が生ずるとしよう; このとき $\mathfrak{e}_{\tau_0}=\mathfrak{e}_{t_0}$ である. 事実, $t(\tau)$ を $\tau'=\tau-\tau_0$ のベキによって展開し直せば,

$$t'(\tau') = t(\tau)-t_0 = c_1'\tau'+c_2'\tau'^2+\cdots \tag{6}$$

が得られ, 明らかに

$$P'(t'(\tau')) = \Pi'(\tau'), \qquad Q'(t'(\tau')) = K'(\tau')$$

となる; なぜなら複素 τ 平面の点 τ_0 の或る一つの近傍では, たとえば $\Pi'(\tau-\tau_0)$, $P'(t(\tau)-t_0)$ は正則な関数であり, その値については $\Pi(\tau)$ と一致するからである. しかも対 $P'(t')$, $Q'(t')$ を $\Pi'(\tau')$, $K'(\tau')$ に移す置換(6)において, 最初の係数 $c_1'=\left[\dfrac{dt(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0}$ は $\neq 0$ である; もしそうでなければ, 関数 $t(\tau)$ は $\tau=\tau_0$ の近くで t の同一の値をつねに少なくとも二つの点でとることになろう. これで $\mathfrak{e}_{\tau_0}, \mathfrak{e}_{t_0}$ は同じであることが証明された.

ここで導入された解析近傍の概念は, これからさきの定式化に適した形をとってはいるが, §1でその代りに用いられた直接解析接続の概念に対応するものである. この解析近傍の概念において, 非正則な要素は正則な要素に比べれば例外の場所にすぎないと考えられることもはっきりする; なぜなら各要素の解析近傍は, それが十分に小さくとられさえすれば, (場合によりこの要素自身を除いて)つねに正則な関数要素ばかりでできているからである. このことを確かめるには, 求める $\mathfrak{e}=(P(t), Q(t))$ の近傍を定める円 $|t|<r$ を十分小さく選んで, このなかでは(場合により $t=0$ を除いて)いたるところ $\dfrac{dP}{dt}\neq 0$ となるようにするだけでよい.

関数要素の解析連結列というものが与えられるのは, 区間 $0\leqq\lambda\leqq 1$ に属する λ の各実数値に一つの関数要素 $\mathfrak{e}(\lambda)$ が対応させられ, つぎの条件が満たされるときである: すなわち, λ_0 はパラメータ λ の任意の値, $\mathfrak{e}_0=\mathfrak{e}(\lambda_0)$ はそれに対応

する関数要素，$\mathfrak{U}_0$ は $\mathfrak{e}_0$ の任意の解析近傍であるとき，いつでも適当な正の数 ε があって，$|\lambda-\lambda_0|\leqq\varepsilon$ である限り $\mathfrak{e}(\lambda)$ は $\mathfrak{U}_0$ に属するという条件である．この解析連結列は始めの要素 $\mathfrak{e}(0)$ を終りの要素 $\mathfrak{e}(1)$ に**結ぶ**.

解析形体というものはつぎの性質をもつ関数要素の集合 **G** である：

1. **G** に属するどの二つの関数要素も，**G** に属する関数要素ばかりから成る解析連結列によって互いに結ばれる.

2. **G** にいくつかの関数要素をつけ加えてこれを拡大し，拡大された集合がなお性質1をもつようにすることはできない.

2. から特に，関数要素 $\mathfrak{e}$ が **G** に属するならば，$\mathfrak{e}$ の各解析近傍も **G** に含まれることが出て来る.

一つの類推によってこの定義を一そうわかりやすくすることができる．明らかに，関数論においてワイヤストラスの関数要素が果たす役割は，幾何学，たとえば三次元空間の幾何学において，空間の要素としての点が演ずる役割と同じである．それゆえ関数要素を点に‘当たるもの’とみなし，三次元点空間について話すように，ここでは“関数要素の空間(これは関数要素の集合という以外の何ものでもない)”について話そう；もちろん一つの関数要素を指定することは，連続的に変動する無限個の決定部分に依存するから，この空間には無限に多くの次元を与えなければならない．三次元空間の連続性に関する概念はすべて“一点の近傍”という一つの概念に帰着させられる(一点の近傍としてたとえばこの点を中心に描かれた球の内部をすべて考える)．関数要素の空間においては，上で“解析近傍”と名づけたものに，点空間における通常の概念“近傍”に‘当たる’役割を与えよう．このとき関数要素の解析連結列はちょうどそのまま点空間における連続曲線に対応する．このように定めると，関数要素の空間は通常の三次元空間と本質的に異なる一つの構造をもっている：すなわち点空間はただ一つの連結した全体をつくっているのに(その任意の二点は連続曲線によって結ばれるのに)，関数要素の無限次元空間は無限に多くの(二次元の)“層”に分かれている；このような層の一つ一つはそれ自体連続的に(すなわちここでは解析的に)連結した全体であるが，別々の層は互いにどのようなところにおいてもつながってはいない；この“層”がちょうど解析形体である．ユークリッドの点空間でわれわれが“領域”と呼ぶ点集合は，1. この集合の各点に

対して，この集合にすっかり含まれる近傍が存在し，2. この集合に属するどの二点も，この集合の点ばかりから成る連続曲線によって結ばれるという性質をもつものである．これによれば，関数要素の空間において解析形体はそれ以上拡げることのできない領域であるといい表わされよう．ここに述べた類推に基づき，解析形体を二次元の多様体として把握しようと意図するならば，われわれはただちに，リーマン－クラインによる表象の仕方の核心に導かれる．初等的な教科書の表現に現われる通常のリーマン面は，実際正確にはつぎのような意味をもつ：すなわち解析形体の各関数要素をそれぞれこの面のただ一点によって表現し，この形体の関数要素から成る解析連結列がこのリーマン面上の連続曲線として現われるようにすること．

しかしここで提起された考え方の筋道をもっと遠くまでたどりうるためには，なお"解析関数"と"解析形体"という二つの概念の関係に立ち入ることが必要である．

§3. "解析関数"と"解析形体"の概念相互の関係.

始めに一つの注意をしておく：§1に述べた方法で，一つの正則な関数要素を，与えられた曲線 $z=z(\lambda)$ $[0\leqq\lambda\leqq1]$ に沿って正則に解析接続することができれば［このことから，λ の値の一つ一つに正則な関数要素 $\mathfrak{e}(\lambda)$ が対応させられ，この要素においては，表現パラメータ t のベキによる z の展開が定数項 $z(\lambda)$ で始まる］，これによって§2の意味における関数要素の解析連結列が得られる．事実：λ_0 は λ の任意の値，$\mathfrak{U}_0$ は $\mathfrak{e}(\lambda_0)=\mathfrak{e}_0$ の任意の解析近傍であるとすれば，$\mathfrak{e}_0$ の正則性によって変数 $z'=z-z(\lambda_0)$ を $\mathfrak{e}_0$ の表現パラメータとして選ぶことができ，またこのとき，たとえば $|z'|<r_0$ によって定められる $\mathfrak{e}_0$ の z' 近傍で，$\mathfrak{U}_0$ にすっかり含まれるものがある．$z(\lambda_0)$ の前後に，不等式 $|\lambda-\lambda_0|\leqq\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ によって一つの弧を区切り，ここではいたるところ $|z(\lambda)-z(\lambda_0)|<r_0$ となるようにすれば，この弧の点に対応する $\mathfrak{e}(\lambda)$ は，$\mathfrak{e}_0$ を $z-z(\lambda)$ のベキに展開し直すことによって得られ，その結果 $|z'|<r_0$ によって定められる $\mathfrak{e}_0$ の z' 近傍に属し，したがってまた近傍 $\mathfrak{U}_0$ に属する．——この逆，すなわち正則な関数要素から成る解析連結列は，その始めの要素から§1に述べた解析接続の手

続きによって得られる，ということについては証明を要しない.

関数要素の一つの解析連結列 $\mathfrak{e}(\lambda)$ $[0\leqq\lambda\leqq 1]$ に，非正則な関数要素(それゆえ特に分岐要素)はつねに有限個しか現われない. 事実，そうでなければ，非正則要素が対応するような λ の値は集積値 λ_0 をもち，$\mathfrak{e}(\lambda_0)$ の各解析近傍のなかに無限に多くの非正則要素がはいっていることになるが，それはありえないことである.

関数要素 $\mathfrak{e}(\lambda)$ の表現における z の展開が定数項 $z(\lambda)$ で始まるとする[表現パラメータ t の負のベキで始まる場合は，便宜上除外しておく]. $\mathfrak{e}(\lambda)$ のなかに分岐関数要素が現われる場合を考えよう；$\mathfrak{e}(0)$ は正則であるとし，$\lambda_0(<1)$ は $\mathfrak{e}(\lambda)$ が非正則であるような λ の値の最小値であるとしよう；$\mathfrak{e}(\lambda_0)$ の分岐位数を $\mu-1$ とする. このとき，0 から λ_0 まで(λ_0 は除く)の λ に対する $\mathfrak{e}(\lambda)$ は，与えられた曲線 $z=z(\lambda)$ に沿う解析接続によって一意的に得られる. λ_0 以後は事情が変わる；$\mathfrak{e}(\lambda_0)$ を過ぎてからさきでは，与えられた曲線に沿う解析接続がちょうど μ 通りの異なる仕方で続けられる：幹(みき)は μ 個の枝(えだ)に分かれ，そのうちの一つに沿って，与えられた解析連結列は進む. これらの枝の一つ一つがさきへ進むに従って再び分岐することもあり，一つの枝の最初の分岐が他の枝の分岐とは全く異なるところに現われることもありうる；以下同様である. もちろんまた，一つの枝において，単なる極や有限位の分岐点を意味しない臨界点に到達するとき，枝はここで完全に切れてしまい，この枝の上では $\lambda=1$ まで達しないこともありうる. 以上述べたことから，“分岐点”というリーマンの表現の基礎にある直観的な観念が，どれほどうまく事がらの本質に適しているかを認識することができる. われわれの主張を証明するには，つぎの簡単な考察で足りる：

$$z=z(\lambda_0)+t^{\mu},\qquad u=Q(t)$$

は $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ の μ 個の正規表現の一つで，$|t|<r$ において有効であるとしよう. 一つの $\lambda_1>\lambda_0$ を適当に選んで，$\lambda_0\leqq\lambda\leqq\lambda_1$ に対してはつねに $|z(\lambda)-z(\lambda_0)|<r^{\mu}$ となるようにする. このとき t 平面には，原点 $t=0$ から始まって円 $|t|<r$ のなかにとどまり，写像 $z=z(\lambda_0)+t^{\mu}$ によって同じ一つの曲線弧 $z=z(\lambda)$ $[\lambda_0\leqq\lambda\leqq\lambda_1]$ に移るような曲線の枝が μ 個存在する；これら μ 個の曲線の枝は原点のまわりの $\dfrac{2\pi}{\mu}$, $\dfrac{4\pi}{\mu}$, … の回転によって互いに移りうるものである. これらの曲線

の枝の一つ一つに沿って $Q(t)$ を解析接続(直接解析接続!)することにより, $\lambda=\lambda_0$ から $\lambda=\lambda_1$ まであらかじめ描かれた曲線に沿う $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ の解析接続が全部で μ 個得られる. これらの解析接続がいずれも解析連結列として最後($\lambda=1$)まで続けられるということは主張されていないし, また一般には成り立たない.

関数要素の解析連結列のどの一つにも非正則要素が有限個しか現われないという事情によって, これらの非正則要素を避けてゆくことが可能になる. それゆえ二つの関数要素がともかく或る解析連結列によって結ばれるならば,(場合により始めの要素と終りの要素を除いて)正則な要素ばかりから成るような解析連結列によっても結ばれる. 証明にあたっては簡単のため, 解析連結列 $\mathfrak{e}(\lambda)$ が一つの非正則要素 $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ $[0<\lambda_0<1]$ だけを含むと仮定する.

$$z=P(t), \qquad u=Q(t)$$

は $|t|<r$ で有効なこの要素の表現であるとしよう; ここで r は十分小さく選ばれており, その結果 $|t|<r$ で定められる $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ の t 近傍 $\mathfrak{U}_0$ の要素は, $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ 自身を除けば, すべて正則であるとする. われわれは二つの値 $\lambda_1<\lambda_0$ と $\lambda_2>\lambda_0$ を適当にとることにより, $\mathfrak{e}(\lambda)$ $[\lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2]$ がすべて $\mathfrak{U}_0$ に属するようにできる. $\mathfrak{e}(\lambda_1)$ は基礎にとった $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ の表現から, それを $t-t_1$(ただし t_1 は円 $|t|<r$ に属する或る一点である)のベキに展開し直すことによって得られ, $\mathfrak{e}(\lambda_2)$ は $t-t_2$ のベキに展開し直すことによって得られる. t 平面の二点 t_1, t_2 は, 円 $|t|<r$ のなかにあって原点を通らない曲線によって結ばれる. この曲線上の各点 t_0 に対して, $P(t), Q(t)$ を $t-t_0$ のベキに展開し直して得られる関数要素を対応させると, 正則な関数要素ばかりから成る解析連結列によって $\mathfrak{e}(\lambda_1)$ と $\mathfrak{e}(\lambda_2)$ を結ぶことに成功する.

上に証明された事実からつぎのことが明らかになる:

1. 一つの解析形体に属する正則な関数要素の全体はただ一つの解析関数をつくる.

2. 各解析関数は, この関数から一意的に決定される解析形体の正則な関数要素の全体から成る.

さらにつぎの定理が出て来る:

3. 一つの解析形体に属する非正則関数要素の全体はたかだか可算な集合として現われる.

この証明はポアンカレと Volterra[1)]によって得られたつぎの定理を使って導かれる：一つの解析形体のなかであらかじめ指定された中心 $z=a$ をもつ正則な関数要素 $u=\mathfrak{P}(z-a)$ は，たかだか可算無限個しか存在しない．実際，これらの要素はすべて，そのうちの一つ，たとえば $\mathfrak{P}_1$ を，z 平面のなかの a から出て a に戻る曲線に沿って正則な仕方で接続することによって得られる．さらにこのような曲線の一つ一つに対し，有限個の線分から成る折れ線をつくって，これが曲線の十分近くを通るようにし，その結果この折れ線に沿う正則な解析接続もまた可能であり，曲線に沿う接続と同じ終りの要素に到達するようにできる．この際さらに，この折れ線の頂点が a に対して有理座標をもつように配慮することもできる；この相対座標 $z-a$ を

$$\frac{n_1'+in_1''}{n_1},\quad \frac{n_2'+in_2''}{n_2},\quad \cdots,\quad \frac{n_h'+in_h''}{n_h}\qquad (i=\sqrt{-1})$$

としよう；ただし n_f', n_f'', n_f はつねに公約数のない整数で，$n_f>0$ である $[f=1,2,\cdots,h]$．この折れ線に数

$$\sum_{f=1}^{h}|n_f'|+\sum_{f=1}^{h}|n_f''|+\sum_{f=1}^{h}n_f=N$$

を対応させる．a から出て a に戻る折れ線で，その頂点が a と有理複素数だけ違うもののうち，同じ数 N が対応するものは，確かに有限個しかない．私が N を順に $=3,4,5,\cdots$ と選べば，これによって上記の折れ線全体が番号の付いた一列に並べられる．この折れ線に沿う $\mathfrak{P}_1$ の正則な接続が成功するかどうかによって，これらの折れ線の一つ一つは a を中心とする関数要素を一つ定めるか，または全く定めないかのどちらかである．ところでこの方法によれば，この解析形体に属する正則要素で中心 a をもつものは確かに全部得られるから，その可算性が証明される．

z 平面の代りに，それから立体射影によって生ずる z 球面を利用することもできる；その上では $z=\infty$ もまた一つの点によって表わされる．

$$z=a+t^{\mu},\ u=Q(t)\text{；あるいは}\quad z=t^{-\mu},\ u=Q(t)$$

1) Poincaré, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2(1888), 197–200 ページ. Volterra, Atti della Reale Academia dei Lincei, Ser. 4, IV_2, 355 ページ.

は，与えられた解析形体の一つの非正則要素を正規表現で表わしたものであり，これが $|t|<r$ で有効であるとすれば，条件

(7) $$|z-a|<r^{\mu} \quad \text{あるいは} \quad |z|>r^{-\mu}$$

を満たす値 z_0($\neq a$ あるいは ∞)の一つ一つに対して，$|t|<r$ によって定まるこの非正則要素の t 近傍に属し，中心 z_0 をもつ正則関数要素 $u=P(z-z_0)$ がちょうど μ 個存在する．われわれは簡潔に，もとの非正則要素が点 z_0 においてこれら μ 個の正則要素を“**誘導する**”という．不等式(7)は球面上で頭巾状の領域を定めるが，いま私はむしろその代りに，a(あるいは ∞)に中心をもち，上記の頭巾状領域からはみ出さない最大の頭巾状領域 K をとろう；K の半径を κ とする．K のなかにある z_0 をこの頭巾状領域のなかでその中心と大円弧によって結べば，さきの非正則要素は，z_0 において誘導された μ 個の要素のどれからも，この円弧に沿う z_0 から a(あるいは ∞)への解析接続によって得られる．それゆえ，同じ中心 a あるいは ∞ をもつ二つの異なる非正則要素があるとき，これらが一点 z_0 において同じ正則要素を誘導することはありえない．異なる中心をもつ二つの非正則要素 $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ があれば，これに対応する頭巾状領域 K を K_1, K_2 で表わし，それらの半径を κ_1, κ_2 とするとき，これら二つの頭巾状領域をそれぞれの中心に向かって収縮させ，これらがただ半分の半径 $\frac{1}{2}\kappa_1, \frac{1}{2}\kappa_2$ をもつようにする．たとえば $\kappa_1 \geqq \kappa_2$ としよう．これら二つの小さい頭巾状領域 k_1, k_2 が重なり合うならば，それらに共通な点を z_0 とする．このとき，$\mathfrak{e}_1$ が z_0 において誘導する要素はいずれも，$\mathfrak{e}_2$ がその点において誘導する要素と同じではないことがいえる．実際，K_2 の中心は頭巾状領域 K_1 の内部にあり，この中心と z_0 を K_2 の内部で結ぶ大円弧も同様である．$\mathfrak{e}_1$ が z_0 において誘導する正則な要素の一つを，K_2 の中心に向かって進むこの円弧に沿って解析接続すれば，そこで $\mathfrak{e}_1$ から誘導される正則な要素の一つが得られるが，正則でない要素 $\mathfrak{e}_2$ は決して得られない．これによってわれわれの主張は確かめられた．

さて，ここで非正則要素 $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ に(小さい方の)頭巾状領域 k_1, k_2 を割り当てたのと同じ手続きをとって，与えられた解析形体の各非正則要素に一つの頭巾状領域 k を対応させよう．もしも非正則要素が単に可算集合としてではなく，もっと多く存在するとすれば，単なる可算個より多くの頭巾状領域 k に含まれ

る一つの有理点 z_0 が存在するはずである．これらの頭巾状領域が対応させられている非正則要素の一つ一つは，点 z_0 においてこの解析形体に属する正則な要素を少なくとも一つ誘導し，それは z_0 を中心にもち，しかもちょうどいま証明したように，異なる非正則要素はつねにまた異なる要素を誘導する．しかし問題の解析形体において中心 z_0 をもつ正則な関数要素は可算個より多く存在しないはずであるから，このことは起こりえない．

それゆえ解析形体が解析関数と区別されるところは，さらに可算個の非正則要素がつけ加えられているということだけである．

§4. 面の概念.

すでに§2の終りで述べたように，一つの解析形体の各要素を或る空間曲面 $\mathfrak{F}$ の点によって代表させ，これらの代表点が全体で $\mathfrak{F}$ を一重におおい，解析形体の要素の各解析連結列が $\mathfrak{F}$ 上の連続曲線として現われるようにすることがうまくできれば，解析形体はこれによって大いに具象性を獲得する．解析形体を具象化するこのような面 $\mathfrak{F}$ を発見するという課題は，純粋に論理的な立場からすればもちろん無用の問題提起としてしりぞけられるかもしれない；なぜなら，三次元空間は本質的に解析形体と全く関係のないものであり，またこれが引き合いに出されるのも明らかに論理的-数学的根拠からでは決してなく，これがわれわれの感覚的な空間直観に対して特に親しみやすいという理由によるからである；単にわれわれの“心像と比喩”に対する要求を満たす目的で，事物をあるがままに受け取る代りに，このような仕方で本質と係わらない観念を押し付けることは，科学の原理に反する擬人主義といわれるかもしれない．しかしながら，すでに言及したもう一つの解釈，そこでは解析形体そのものが一つの二次元多様体として現われ，通常の幾何学において出会う連続性に関する概念はすべてその上に移されるという解釈に従うならば，上に述べた純粋な論理家の批難はわれわれに当たらない．反対に，もしこの観念を利用しないとすれば，この対象の本質的な側面の一つを見のがしているといえよう．

“二次元多様体”あるいは“曲面”の概念はそれゆえわれわれにとって空間の点という理念に結びついたものではなく，それよりもはるかに一般的な抽象的

意味をもつものでなければならない．およそ何か或るもの(それらは“点”の役割をになうであろう)の集まりが与えられ，定義によってそれらのもののあいだに，平面上の点のあいだにあるのと同じような連続的関係が存在するとき，われわれは一つの二次元多様体について話すことになる．ところで連続性に関する概念はすべて近傍という一つの概念に帰着するから，一つの二次元多様体を定義するには，つぎの二通りのことが必要である：

1. この多様体の“点”として用いられるべきものを示すこと；
2. “近傍”の概念を定義すること．

さらに正確な表現では：いつわれわれは，一つの**二次元多様体 $\mathfrak{F}$ が与えられている**というのか？　それはつぎのことが成り立つときである：

“**多様体 $\mathfrak{F}$ の点**”と呼ばれるものの集まりが与えられている．多様体 $\mathfrak{F}$ の各点 $\mathfrak{p}$ に対して，この多様体の点から成る或るいくつかの集合が，“**$\mathfrak{F}$ における点 $\mathfrak{p}$ の近傍**”として定められている．多様体の一点 $\mathfrak{p}_0$ の $\mathfrak{F}$ における各近傍 $\mathfrak{U}_0$ は必ず $\mathfrak{p}_0$ 自身を含み，通常のユークリッドの円の内部 K_0 の点への一対一写像(これによって $\mathfrak{p}_0$ は円の中心に移る)を一つ許し，しかもこの写像はつぎの性質をもつ：

1. $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{U}_0$ の任意の一点であり，$\mathfrak{U}$ は $\mathfrak{F}$ における $\mathfrak{p}$ の近傍で，$\mathfrak{U}_0$ の点ばかりから成るとすれば，(上記の写像によって K_0 のなかに描かれた)$\mathfrak{U}$ の像は $\mathfrak{p}$ の像点を 内 部 に 含む；すなわち $\mathfrak{p}$ の像点 p を中心として一つの円板 k を描き，k の各点が $\mathfrak{U}$ の点の像となるようにできる；
2. K はすっかり K_0 のなかに含まれて中心 p をもつ任意の円の内部であるとすれば，$\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{F}$ における近傍のうちには，その像がすっかり K のなかにはいるものがいつでも存在する[1]．

ここで，近傍の概念に基づき，どのようにして連続性に関するすべての概念が通常の平面から任意の二次元多様体に移されうるかを手短かに述べよう．

多様体 $\mathfrak{F}$ の点の集合 $\mathfrak{E}$ が与えられているとき，$\mathfrak{F}$ の点 $\mathfrak{p}$ が集合 $\mathfrak{E}$ の**凝集位置**(**集積点**)と呼ばれるのは，$\mathfrak{F}$ における $\mathfrak{p}$ の各近傍に $\mathfrak{E}$ の点が無限に多くは

1) (第2版巻末の訂正と補注) 二次元多様体の概念の定義には，つぎの要請をつけ加える必要がある：一つの点のどの二つの近傍に対しても，両方に含まれる一つの近傍がいつでも存在する．

いっている場合である.——$\mathfrak{E}$ に属する点で，$\mathfrak{E}$ の集積点ではないものを $\mathfrak{E}$ の**孤立点**という．これに対して，$\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{E}$ の**内点**であるというのは，$\mathfrak{F}$ における $\mathfrak{p}$ の近傍のうちに，$\mathfrak{E}$ に属する点ばかりから成るものが存在する場合である．——$\mathfrak{E}$ の集積点がいずれも $\mathfrak{E}$ に属するとき，$\mathfrak{E}$ は**閉じている**といわれる.

区間 $0 \leqq \lambda \leqq 1$ の各実数 λ に $\mathfrak{F}$ 上の点 $\mathfrak{p}(\lambda)$ が対応させられており，連続性の条件が満たされているとき，$\mathfrak{F}$ 上の**連続曲線** γ が与えられる．これはつぎのことを意味する：λ_0 はパラメータ λ の任意の値であり，$\mathfrak{U}_0$ は $\mathfrak{F}$ における点 $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ の任意の近傍であるとき，いつでも或る正の数 ε があり，これは条件 $|\lambda-\lambda_0| \leqq \varepsilon$ を満たすすべての λ に対して，点 $\mathfrak{p}(\lambda)$ が $\mathfrak{U}_0$ に属するという性質をもつ.——この曲線 γ は始点 $\mathfrak{p}(0)$ を終点 $\mathfrak{p}(1)$ に**結ぶ.**

$\mathfrak{F}$ 上の点集合 $\mathfrak{E}$ が**領域**と呼ばれるのは，1) $\mathfrak{E}$ の各点がこの点集合の内点であり，2) $\mathfrak{E}$ のどの二点も $\mathfrak{E}$ の点ばかりから成る $\mathfrak{F}$ 上の連続曲線によって結ばれるときである．——われわれはこれまで使って来た二次元多様体 $\mathfrak{F}$ という概念をさらに狭くし，$\mathfrak{F}$ 自身が一つの領域でなければならない(ひとつながりのものから成る)という要請を加える.

$\mathfrak{F}$ 上の或る点集合 $\mathfrak{E}$ の各点 $\mathfrak{p}$ に一つの実数または複素数 $f(\mathfrak{p})$ が対応させられているとき，$\mathfrak{E}$ において一つの**関数** f が定められる；数 $f(\mathfrak{p})$ はこの関数の点 $\mathfrak{p}$ における**値**である．$\mathfrak{E}$ の任意の点を $\mathfrak{p}_0$ で表わすとき，f が点 $\mathfrak{p}_0$ において**連続**であるというのは，正の数 ε の一つ一つに対して，$\mathfrak{F}$ における $\mathfrak{p}_0$ の一つの近傍 $\mathfrak{U}_\varepsilon$ が存在し，$\mathfrak{E}$ にも $\mathfrak{U}_\varepsilon$ にも属するすべての $\mathfrak{p}$ に対してつねに $|f(\mathfrak{p})-f(\mathfrak{p}_0)|<\varepsilon$ が成り立つ場合である.

$\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ は二つの二次元多様体で，$\mathfrak{E}_1$ は $\mathfrak{F}_1$ 上の点集合であり，さらに $\mathfrak{E}_1$ の各点 $\mathfrak{p}^{(1)}$ に $\mathfrak{F}_2$ の点 $\mathfrak{p}^{(2)}$ が対応させられているならば，これによって **$\mathfrak{E}_1$ から $\mathfrak{F}_2$ のなかへの写像**が与えられる．$\mathfrak{F}_2$ 上の像点の集合は $\mathfrak{E}_1$ の**像集合**と呼ばれる．この写像はつぎのことが成り立つとき**連続**であるという：$\mathfrak{p}_0^{(1)}$ は $\mathfrak{E}_1$ の任意の点，$\mathfrak{p}_0^{(2)}$ はその $\mathfrak{F}_2$ 上の像点，$\mathfrak{U}^{(2)}$ は $\mathfrak{F}_2$ における $\mathfrak{p}_0^{(2)}$ の任意の近傍であ

閉じた集合の連続な写像に関する 21 ページの主張は，“完全に有限な範囲にある”集合に制限しなければならない；このような集合 $\mathfrak{E}$ は，無限に多くの点から成る $\mathfrak{E}$ の部分集合がいずれも集積点をもつということによって特徴づけられる．これと，27 ページに与えられる閉じた面の定義とを比較せよ．三角形分割を使えば，完全に有限な範囲にあるという集合の特徴は，それが有限個数の基本三角形の点だけを含むといい表わされる.

るとき，いつでも $\mathfrak{F}_1$ における $\mathfrak{p}_0^{(1)}$ の近傍 $\mathfrak{U}^{(1)}$ を一つ選んで，同時に $\mathfrak{E}_1$ と $\mathfrak{U}^{(1)}$ に属する各点の像点が $\mathfrak{U}^{(2)}$ の点となるようにできる．——閉じた集合[1]の連続な像はまた閉じている．——$\mathfrak{p}^{(1)}(\lambda)$ $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ が $\mathfrak{F}_1$ 上の連続曲線であり，この曲線上のすべての点が，第二の多様体 $\mathfrak{F}_2$ のなかへ連続に写像される集合 $\mathfrak{E}_1$ に属するときには，パラメータ λ の値の一つ一つに，与えられた $\mathfrak{E}_1$ の写像によって点 $\mathfrak{p}^{(1)}(\lambda)$ から決まる $\mathfrak{F}_2$ 上の点 $\mathfrak{p}^{(2)}$ を対応させることによって，$\mathfrak{F}_2$ 上に一つの連続曲線を定めることができる．この曲線は与えられた曲線の**像**と呼ばれる．——($\mathfrak{F}_1$ 上の)閉じた集合[1]$\mathfrak{E}_1$ が一対一に，そして連続に $\mathfrak{F}_2$ の部分集合 $\mathfrak{E}_2$ の上へ写像されるとき，その**逆写像**(すなわち，$\mathfrak{E}_2$ の各点 $\mathfrak{p}^{(2)}$ に，これを像点とする $\mathfrak{E}_1$ のただ一つの点 $\mathfrak{p}^{(1)}$ を対応させることによって生ずる写像)もまた連続な写像である．

普通の意味における連続な写像の概念は主に閉じた集合[1]に対して問題になるが，これと並んでもう一つの連続概念が現われる；それは同じように，内点ばかりから成る領域に合うようにつくられ，今までのところ呼び名を欠くものである；私は“領域連続”という表現を提案する．$\mathfrak{F}_1$ 上の内点ばかりから成る集合 $\mathfrak{E}_1$ の写像は，つぎのような場合に**領域連続**と呼ばれる：$\mathfrak{E}_1$ に属する任意の点 $\mathfrak{p}_0^{(1)}$ の近傍で，すっかり $\mathfrak{E}_1$ に含まれるものを $\mathfrak{U}_0^{(1)}$ とすれば，いつでもその像 $\mathfrak{B}_0^{(2)}$ は $\mathfrak{p}_0^{(1)}$ の像点 $\mathfrak{p}_0^{(2)}$ を内部に含む．一対一で両側から領域連続な写像はまた普通の意味で連続である．基本的な，L. E. J. Brouwer によって証明された定理[2]は，これについて逆も成り立つことを述べている：内点ばかりから成る集合の，一対一で連続な写像はいずれも，その逆写像とともに領域連続である．この定理によって領域連続性の概念は再び不要になる．しかしこれからあと，証明のむずかしいこの定理を利用する機会が全くないから，やはりここでも“領域連続”という言葉を残しておきたい．——19 ページで二次元多様体を定義したとき，近傍の概念について設けた要請 1. と 2. は，いまではつぎのように簡潔にいい表わされる：$\mathfrak{F}$ における点 $\mathfrak{p}_0$ の近傍はいずれも一つの

1)(訳注) 前ページの脚注を参照．‘閉じた’を‘コンパクト’と読みかえよ．

2) Mathematische Annalen, **70**(1911), 161–165 ページ；**71**(1912), 305–313 ページ；**72**(1912), 55–56 ページ．Brouwer の研究は n 次元の領域をとり扱っている．われわれにとって問題になるのは二次元の場合だけであるが，この場合はすでにそれよりもはやく，いわゆる “Jordan の曲線定理” の助けをかりて，Schoenflies(Göttinger Nachrichten, 1899, 282–290 ページ), Osgood(同上, 1900, 94–97 ページ), F. Bernstein(同上, 1900, 98–102 ページ)が解決している．

円の内部の上へ一対一に，また両側から領域連続に写像される(この際，$\mathfrak{p}_0$ は円の中心に移る).

多様体 $\mathfrak{F}$ における点の“近傍”として何を考えるべきかに関しては，その定義を或る程度まで変え，しかもその結果として多様体 $\mathfrak{F}$ を別のものとみなさないですむようにできる．すなわち $\mathfrak{F}$ の点としての役割を果たすべきものの定義には手を触れることなく，しかも近傍の概念に関するもとの(“第一の”)定義を，いま新たに定式化した要請を同じように満たす第二の定義に置き換えるとき，つぎの命題が成り立つとする：$\mathfrak{p}_0$ が $\mathfrak{F}$ 上のどの点であっても，第二の定義によって $\mathfrak{p}_0$ の近傍と指定された点集合はいずれも，第一の定義によって $\mathfrak{p}_0$ の近傍と呼ばれるべき点集合を一つ含み，またその反対も成り立つ――この場合，第二の定義によって決定された多様体は，第一の定義によって決定されたものと異ならないとみなすという規約を設けよう．この規約のなかにもまた“抽象による定義”が横たわっているが，これを正当化する証明は読者に任せることができる．さらにまた，連続性に関して上に列挙した諸概念のうちに，近傍の第一の定義を第二の定義に置き換えることによって何かの影響を受けるものは一つもない：第一の定義によって閉集合または領域であるといわれる集合は，第二の定義によってもそのままである；同じことは連続関数，連続曲線，連続写像などについても成り立つ.

二次元(またはさらに高い次元)の多様体の連続性に関する性質をとり扱う数学の分野は，**位置解析**または**位相幾何学**と呼ばれる．この原理は関数論においてリーマン以来重要な役割を果たしており，われわれはつぎの数節において二次元多様体の位相幾何学とさらに立ち入った係わり合いをもたなければならないであろう．二つの多様体が，点ごとに一対一に，両側から領域連続に一方から他方の上へ写像されるとき，これらは**位置解析の意味で同値**であるとみなされなければならない．互いに同値な二次元多様体は，同じ一つの“理想的な多様体”が現実化されたものであって，これらの異なる現実化を互いに区別する個別的な特徴は，この理想的な多様体のなかでは拭い去られていると解釈することが許される(抽象による定義)．上に整理した連続性に関する諸概念は，両側から一意領域連続な任意の写像に対して不変に振舞うから，純粋に位置解析的な概念である．解析形体を二次元多様体と考えることによって，この多様体

の位置解析的性質を最も鋭い，最も原初的な性質として前景に押し出すことができるようになる．またこのとき，位置解析に属するこのような概念と方法の助けだけをかりて，これらの性質を基礎づけることは，事がらの本質による要求であると私には思われる．リーマンは関数論の建設にあたって，この要求を満たした．

多様体 $\mathfrak{F}$ の部分領域 $\mathfrak{G}$ はそれ自身一つの二次元多様体 $\mathfrak{G}$ である；ただしわれわれは $\mathfrak{G}$ における $\mathfrak{G}$ の一点の近傍として，すっかり $\mathfrak{G}$ に含まれるような，$\mathfrak{F}$ におけるこの点の各近傍を考える．このときすっかり $\mathfrak{G}$ に含まれるような，$\mathfrak{F}$ における各曲線はまた $\mathfrak{G}$ における連続曲線である．以下同様．

二次元多様体に関する本質的な諸定理を導くことができるためには，この概念をもっと強い制限の下に置くことが必要であるように思われる；制限の目的は，考えられている多様体に"汲み尽くし(Exhaustion)法"の適用を保証しておくことにある．平面領域の汲み尽くしには，最も簡単なものとして三角形(三角形分割の方法)が利用される．それゆえこれからは，平面領域と同じような意味で三角形に分割されるような多様体だけを考えよう；のちに各解析形体に対して，その三角形分割が可能であることの証明を与えることができるから，この制限はわれわれにとって心配なものではなくなるであろう．

平面三角形は，その頂点に関する同次重心座標を用いると最も容易に書き表わされる．このことを使って，われわれはつぎのような定義に到達する．三つの実の，負でない数の三つ組 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0)$ の一つ一つに，多様体 $\mathfrak{F}$ の点 $\mathfrak{p}$ が対応させられ，しかも 1) このような二個の三つ組に同じ点 $\mathfrak{p}$ が対応するのは，これらの数の三つ組が双方とも等しい比$(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$をもつときに限り，2) 連続の条件が満たされているならば，$\mathfrak{F}$ の上に一つの**三角形** $\triangle$ が定められているという．$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ は $\mathfrak{p}$ の $\triangle$ における**座標比**と呼ばれる．——連続の条件とはつぎのことを意味する：$(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$は問題になっている三つ組の任意の一つ，$\mathfrak{p}^0$ はそれに対応する点，$\mathfrak{U}_0$ は $\mathfrak{F}$ における $\mathfrak{p}^0$ の任意の近傍であるとき，或る正の数 ε が存在して，問題になっている三つ組のうち条件

$$|\xi_1 - \xi_1^0| < \varepsilon, \quad |\xi_2 - \xi_2^0| < \varepsilon, \quad |\xi_3 - \xi_3^0| < \varepsilon$$

を満たすものについては，いつでも像点 $\mathfrak{p}$ がさきの近傍 $\mathfrak{U}_0$ に属する．

それゆえ三角形を定めるということは，それに属さなければならない $\mathfrak{F}$ の

点が指定されることだけを意味するのではなく，その点の一つ一つに，三つの負でない数の座標比が割り当てられたとき，始めてそれは完全に決定されたとみなされるのである．点 1:0:0, 0:1:0, 0:0:1 はこの三角形の三つの**頂点**を表わすものとされよう；その三つの**辺**はそれぞれ $\xi_1=0$, $\xi_2=0$, $\xi_3=0$ によって与えられる．

われわれはいま三角形分割の可能性という要請を [Brouwer の基本的な仕事[1]ときわめて密接に関連し，また Enzyklopädie に展開されている Dehn-Heegaard の理論[2]と二，三の点で一致する形で] つぎのように理解しなければならないであろう．多様体 $\mathfrak{F}$ の上に有限個または無限個の三角形 △ (三角形分割の "基本三角形") が定められており，この多様体の各点はこれらの三角形 △ のうちの少なくとも一つに属し，その上つぎの条件が満たされているとする：

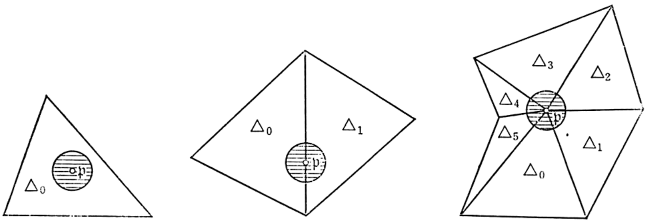


図 1. 三角形分割の内点，辺の点，頂点.

1) $\mathfrak{p}$ が △-三角形 $\triangle_0$ に属し，$\triangle_0$ の辺上にはない点であるとき，$\mathfrak{p}$ ばかりでなく，$\mathfrak{p}$ の或る一つの近傍の点はいずれも，$\triangle_0$ と異なる三角形 △ の一つに属さない.

2) $\mathfrak{p}$ が $\triangle_0$ の辺 k の上にあるけれども，$\triangle_0$ の頂点ではないとき，$\mathfrak{p}$ を含む別の △-三角形 $\triangle_1$ がもう一つ存在する；$\triangle_0$, $\triangle_1$ は k 上の点をすべて共有するが，それら以外の点を共有しない；$\mathfrak{p}$ ばかりでなく，$\mathfrak{p}$ の或る一つの近傍

1) 特に L. E. J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., **71** (1912), 97 ページ以下を見よ．さらに J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, 第 2 版 (Paris 1910) の第 2 巻にある J. Hadamard の "Sur quelques applications de l'indice de Kronecker" を見よ．空間内の任意の閉曲面を一つの多面体とみなす考え方は Möbius により，特に遺稿 "Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft" (1861)，全集，第 II 巻，517 ページ以下において明快に展開されている．

2) Enzyklopädie III AB 3, 153 ページ以下.

の点はいずれも，$\triangle_0$ および $\triangle_1$ と異なる $\triangle$-三角形の一つに属さない.

3) $\mathfrak{p}$ が一つの三角形 $\triangle$ の頂点であるとき，$\mathfrak{p}$ を含む有限個の $\triangle$-三角形：$\triangle_0, \triangle_1, \cdots, \triangle_h$ が存在する；これらの三角形のいずれにおいても $\mathfrak{p}$ は頂点であり，またこれらはつながってただ一つのサイクルをつくり，$\triangle_0$ は $\triangle_1$ とちょうど一つの辺を，$\triangle_1$ は $\triangle_2$ と一つの辺を，…，最後に $\triangle_h$ は再び $\triangle_0$ と一つの辺を共有する[1)]；$\mathfrak{p}$ ばかりでなく，$\mathfrak{p}$ の或る一つの近傍の点はいずれも，サイクル $\triangle_i$ $(i=0, 1, \cdots, h)$ のなかに現われない三角形 $\triangle$ には属さない：

このとき多様体は**基本三角形 $\triangle$ に分割**されている.

われわれは今後，基本三角形に分割されるような二次元多様体だけを考えに入れる；このような多様体に対して私は**面**という短い呼び名を使いたい．面の上の位置解析に対して三角形分割の可能性がどれほど大きい意味をもつかは，まもなく明らかにされよう.

面 $\mathfrak{F}$ が基本三角形 $\triangle$ に分割されているとき，有限個の(互いに異なる)これらの三角形 $\triangle$ から成る順序のついた列：

$$\triangle_1, \quad \triangle_2, \quad \cdots, \quad \triangle_n$$

において，$\triangle_j$ がつねに $\triangle_{j+1}$ と一つの辺を共有する場合，この列を三角形の**(単純な)鎖**といい表わそう；この鎖は $\triangle_1$ を $\triangle_n$ に"結ぶ". (さらにまた $\triangle_n$ が $\triangle_1$ と一つの辺 k を共有するとき，この鎖は辺 k を越えて閉じている.) $\mathfrak{F}$ のどの二点も $\mathfrak{F}$ 上の連続曲線によって結ばれるという事情から，どの二つの基本三角形 $\triangle$ も三角形 $\triangle$ の単純な鎖によって互いに結ばれうるという結果が得られる．実際まず第一に，一つの連続曲線 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}(\lambda)$ $[0\leqq\lambda\leqq1]$ と点を共有するような三角形 $\triangle$ は有限個しかありえない．もしも無限個あるとすれば，曲線上の点 $\mathfrak{p}(\lambda_j)$ $[j=1, 2, \cdots]$ から成る無限列で，このうちのどの二点も同じ三角形には属さないものが得られるはずである；このとき λ_j の集積値の一つを λ_∞ とすれば，$\mathfrak{p}(\lambda_\infty)$ の各近傍には無限に多くの三角形の点が見いだされなければならない：このことは，どの三角形分割に対しても定められた要請 1)-3) によって不可能である．今度は与えられた二つの三角形 $\triangle$，すなわち $\triangle_0$ と $\triangle^0$ を一つの鎖で結ぶために，私はつぎのような手続きをとる：$\triangle_0$ の内部の一点と

1) このような配置を**三角形の星**(Dreiecks-Stern)と呼ぼう.

$\triangle^0$ の内部の一点を任意に選び，両者を $\mathfrak{F}$ の上で連続曲線 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}(\lambda)$ $[0\leqq\lambda\leqq 1]$ によって結ぶ．この曲線が三角形 $\triangle_0$ を最終的に離れるのはいつか——私はわざと λ が時刻を意味するかのようないい表わし方をする——ということに注目する；いいかえれば，私は $\mathfrak{p}(\lambda)$ が $\triangle_0$ に属するような λ の最大値 $\lambda=\lambda_0$ を求める．点 $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ は $\triangle_0$ の一辺 k の上にあるであろう．これが頂点でなければ(第一の場合)，曲線はこれから k において $\triangle_0$ と隣接する三角形のなかにはいってゆく：この $\triangle_1$ がいまつくろうとしている鎖の一番近い項である．これに反して $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ が頂点ならば，私は $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ をとりまく完全な三角形の星をつくり，これを単独の閉じた鎖 $\triangle_0\triangle_1\cdots\triangle_h$ とみなすことができる．$\triangle^0$ がこの鎖の三角形のうちに現われるならば，手続きはすでに済んでいる；そうでないならば，曲線がこの星を最終的に離れるのはいつかということに注目する．このことが起こる点 $\bar{\mathfrak{p}}_0$ は，決して $\triangle_0$ の点ではない($\triangle_0$ からは，すでにもっと前に最終的に離れているからである)；反対に，列 $\triangle_1, \cdots, \triangle_h$ のなかに，点 $\bar{\mathfrak{p}}_0$ を含む最初の(そして $\bar{\mathfrak{p}}_0$ が頂点でない場合にはただ一つの)三角形があるから，これを $\triangle_g$ とする．このとき私はいまつくっている鎖の一番近い数項として $\triangle_1, \cdots, \triangle_g$ をとる．(第一の場合には $g=1$ とする.)　始めに私が $\triangle_0$ にとった手続きを今度は $\triangle_g$ に施して，求める鎖のつぎの一項あるいは数項を得る；こうして新たに得られた項の最後のものに，また同じ接続の手続きを適用し，以下これを続ける．こうして得られる項はすべてもとの曲線と共通な点をもつ三角形である．ところでこの接続においては，曲線が三角形または星を最終的に離れる瞬間がいつも決定的であるから，すでに得られた三角形に戻ることは決してない．それゆえこの手続きは，ともかく有限個の三角形だけを対象としているのであるから，いつかは終るはずである；ところがそのことは，私が曲線の終点まで，すなわち三角形 $\triangle^0$ まで行き着いたときはじめて起こる．それゆえここに述べた構成法によって，実際 $\triangle_0$ は $\triangle^0$ と単純な鎖で結ばれる．

このことからさらに，基本三角形 $\triangle$ は単に有限または可算無限の集合をつくりうるに過ぎないことがわかる．一つの三角形 $\triangle_0$ から出発して，$\triangle_0$ の辺と頂点で接する有限個の三角形 $\triangle$ をとり，さらにそれまでにとられた三角形の自由な辺と頂点で接する有限個の三角形をとり，以下同様とする．このようにしてわれわれは $\triangle$ を可算列に並べる；この際，どの三角形もいつかはこの

列にとり上げられるということは，鎖による連結の可能性を述べた上の定理からただちに出て来る．

面 $\mathfrak{F}$ 上の点集合が集積点をもたないとき，それは有限または可算である．なぜなら各三角形 △ が明らかにこのような集合に属する点を有限個しか含みえないからである．基本三角形への分割可能性を仮定しない多様体の上では，いま述べた定理は一般に成り立たない．かりに，一つの解析形体のなかの非正則要素の集合が可算でないとすれば，その解析形体は確かに三角形分割されえないことになる．反対に，一つの解析形体のなかに実は可算個しか非正則要素が含まれていないという事実が，§6 において任意の解析形体を実際に三角形分割するとき，われわれにとって本質的な出発点となるであろう．

集積点をもたない無限点集合が $\mathfrak{F}$ 上にはおよそ存在しないとき，$\mathfrak{F}$ は**閉じている**という．$\mathfrak{F}$ に一つの分割を定め，各基本三角形 △ の内部に一点を任意に選べば，集積点のない集合が得られる．それゆえ：閉じた面は有限個の基本三角形に分割されるが，決して無限個の基本三角形には分割されない．ところでまた逆に：**開いた**(＝閉じていない)面は無限個の基本三角形に分割されるが，決して有限個の基本三角形には分割されない．実際，基本三角形 △ の個数が有限ならば，$\mathfrak{F}$ 上にどんな無限点集合をとっても，三角形 △ のうちの少なくとも一つに，このような集合に属する無限個の点が落ちるはずであるから，この集合は集積点をもつ．

§5. 面　の　例.

1. ユークリッド平面(開)．
2. 四辺形の内部(開)．

ここに添えた図によって，これらの面に対して決められた一つの三角形分割を示しておこう．この場合，各三角形を §4 の意味における“$\mathfrak{F}$ 上の三角形”にするために，この三角形の頂点に関する同次重心座標によって，この三角形の点を表現しておく．

3. 射影平面．任意の三つの実数 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0)$ からつくられる比 $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ の全体として，これは数論的に定義される．動く“点”$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ が固定

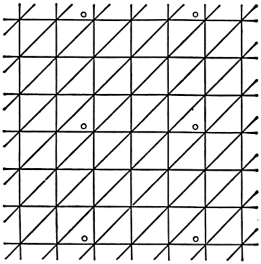


図 2. 平面および面 $\mathfrak{T}$(32ページ)の三角形分割.

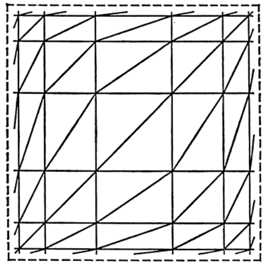


図 3. 四辺形内部の三角形分割.

点 $\xi_1^0:\xi_2^0:\xi_3^0$ に収束するのは,

$$\frac{(\xi_2\xi_3^0-\xi_3\xi_2^0)^2+(\xi_3\xi_1^0-\xi_1\xi_3^0)^2+(\xi_1\xi_2^0-\xi_2\xi_1^0)^2}{[(\xi_1^0)^2+(\xi_2^0)^2+(\xi_3^0)^2][\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2]}$$

が 0 に近づく場合であり，またこの場合に限るとし，これに合わせて近傍の概念を理解しなければならない．(10 個の基本三角形への)一つの三角形分割が図 4 に示されている；この際，個々の三角形が，それらの一つ一つに属する射影的三角形座標の助けにより，どのようにしてわれわれの一般的な意味における“三角形”と解釈されうるかは，ただちに明らかにされる．射影平面は閉じている.

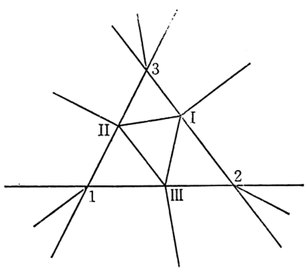


図 4. 射影平面の三角形分割.

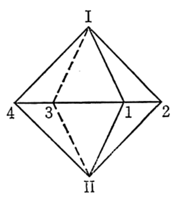


図 5. 八面体.

4. 正八面体の表面は，自然な形のままで八つの三角形に分割され，それらに重心座標を関連させれば，それらを一つの三角形分割の基本三角形と解釈することができる．これは閉じている.

5. 正八面体のまわりに球面を描き，正八面体の中心からそれを球面上に射影すれば，八つの基本三角形(八分円)に分割された多様体としての球面が得られる．球面と正八面体は位置解析の意味で同値である．

6. メービウスの帯[1]．細長い長方形を三次元空間のなかで 180° だけねじってから曲げ，長方形の狭い二辺が反対の向きに重なるようにすれば，この帯ができる．この空間曲面を解析的に最も簡単に表現するには，直交座標 xyz に関して，二つの実のパラメータ ρ, φ を使い，つぎのようにおけばよい[2]：

$$\begin{cases} x = \left(a-\rho\sin\frac{1}{2}\varphi\right)\cos\varphi, \\ y = \left(a-\rho\sin\frac{1}{2}\varphi\right)\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\frac{1}{2}\varphi. \end{cases}$$

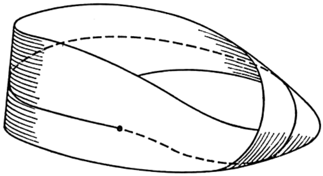


図 6. メービウスの帯.

φ は無制限に動くことができ，ρ は条件 $|\rho|<h$ によって束縛される；a と h は正の定数を意味し，そのうちで h の方が小さくなければならない．位置解析の意味でメービウスの帯は明らかにつぎの多様体 $\mathfrak{B}$ と同じである：

直交座標 ρ, φ をもつユークリッド平面において，帯状領域 $|\rho|<1$ と，

$$\rho' = (-1)^n\rho, \qquad \varphi' = \varphi+2n\pi \qquad [n=0, \pm1, \pm2, \cdots]$$

によって定義されるパッデル運動 (Paddelbewegung)[3] $(\rho, \varphi)\to(\rho', \varphi')$ の離散

1) Möbius, 全集, 第 2 巻, 484-485 ページと 519-521 ページ.

2) この方程式によって表わされる曲面はもちろん展開可能ではない.

3) (低地ドイツの言葉使いから借用した)語 “Paddelbewegung” によって，つぎのことを示唆したい：この平面を一つの軸のまわりに何回でも続けて折り返し，その向きを交互に左まわりおよび右まわりにしながら，一方では同時に毎回(2π の長さだけ)その軸の方向に前進させることによってこの群が得られる．〔訳注：パッデルは橈架のない橈である.〕

群 Γ を考えよう．この平面上の点から成る一つの系 S が Γ **に関して同値な点の系**(あるいは単に：Γ **に関する点系**)と呼ばれるのは，群 Γ の各運動によって S の点は S の点に移り，そしてまた，S の各点は別の各点にこの群の運動によって移されうるという場合である．帯状領域 $|\rho|<1$ に含まれるような，Γ に関する一つの点系をこれから定義しようとする多様体 $\mathfrak{B}$ の“点”と呼ぼう．

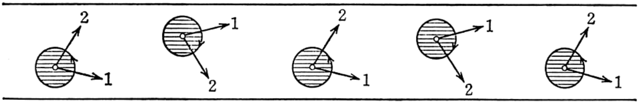


図 7 a. $\mathfrak{B}$ 上の点とその近傍および角.

S_0 がこのような $\mathfrak{B}$ の“点”であるとき，点系 S_0 に属する個々の(ユークリッドの)点を中心として，帯状領域にすっかり含まれ，すべて合同な円(図 7 a)を描けば，これらの各円のなかでは一つの点によって代表されるような，Γ に関する点系 S の全体は，$\mathfrak{B}$ における S_0 の一つの“近傍”をつくる．Γ に関する点系 S に属する普通の一点について，それは $\mathfrak{B}$ の“点” S “の真上にある(liegen über)”ということにすれば，この平行帯状領域は $\mathfrak{B}$ の真上の“被覆面”とみなされ，この被覆面は $\mathfrak{B}$ を無限多葉に覆い，しかもどの場所においても $\mathfrak{B}$ に対して分岐していない．平行帯状領域にはユークリッドの角計量を適用しよう；これを $\mathfrak{B}$ の被覆面と解釈することによって，この角計量はただちに $\mathfrak{B}$ の上に移される．しかしこの場合，角測度は 2π の整数倍まで定まらないだけではなく，その符号についても定まらない(図 7 a)．この事情はメービウスの帯がもつ一つの性質，すなわち“単側性(Einseitigkeit)”(この面を離れることなく，また縁を乗り越えることもなく，一つの側からもう一つの側へ行くことができること)という性質に結びついているが，この性質には関数論的な意味があるから，あとでもっと正確に注意することにしよう．——$\mathfrak{B}$ の三角形分割，したがってメービウスの帯の分割は，図 7 b に示されている．

7. 輪環面(図 8)をつくるには，半径 r の円と同じ平面上にあって，この円と交わらない軸のまわりに，この円を回転させればよい；$R(>r)$ は円の中心からこの軸までの垂直距離であるとしよう．この面上の点の直交座標 xyz は，幾何学的意味の明瞭な二つの実パラメータ σ, φ を使って，

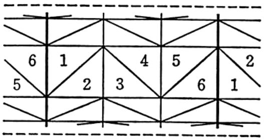


図 7 b. 𝔅 の三角形分割.

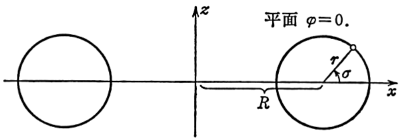


図 8. 輪環面の構成.

$$\begin{cases} x = (R+r\cos\sigma)\cos\varphi, \\ y = (R+r\cos\sigma)\sin\varphi, \\ z = r\sin\sigma \end{cases}$$

という形に表わされる. 輪環面には, 三次元ユークリッド空間のなかの曲面として, 自然な(ユークリッドの)角計量が与えられている. 輪環面の上に一つの曲線

$$\varphi=\varphi(\lambda), \qquad \sigma=\sigma(\lambda)$$

が与えられ, $\dfrac{d\varphi}{d\lambda}$, $\dfrac{d\sigma}{d\lambda}$ は連続で, いたるところ $\left(\dfrac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2+\left(\dfrac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \neq 0$ であるとするとき, この曲線の弧の長さ $s=s(\lambda)$ の微分商は,

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2=(R+r\cos\sigma)^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2+r^2\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2$$

から計算される. σ の代りに新しいパラメータ ψ を導入し,

(8) $$\psi=\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\dfrac{R}{r}+\cos\sigma}$$

とおけば, 上の式の代りに

(9) $$ds^2=e(d\varphi^2+d\psi^2), \qquad ただし \quad e=(R+r\cos\sigma)^2$$

と書くことができる. (8)により, ψ は一意かつ連続的に微分可能な σ の関数として, また逆に σ は同じ性質をもつ ψ の関数として定められる. 輪環面上の一つの決まった点に対応する値(φ, ψ)は, それぞれ

$$2\pi, \quad および \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{\dfrac{R}{r}+\cos\sigma}=\frac{2\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

の整数倍だけを除いて定まる．そこでわれわれはつぎのことに気が付く：直交座標 φ, ψ をもつユークリッド平面において，並進群

$$\left.\begin{aligned} &\varphi' = \varphi + 2m\pi, \qquad \psi' = \psi + \frac{2\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}n \\ &\begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Gamma$$

を考え，Γ に関して同値な点の系，すなわちいわゆる“**点格子**”を新しい多様体 $\mathfrak{T}$ の“点”ということにすれば，このときさきの平面は無限多葉の，そしてどこでも分岐しない被覆面としてこの多様体の真上に拡がる．平面の角計量はそのまま多様体 $\mathfrak{T}$ の上に移され，その結果として(メービウスの帯の場合のような)角の符号に関する不確定さは生じない．パラメータ φ, ψ による輪環面の表現を使えば，輪環面は多様体 $\mathfrak{T}$ の上へ両側から一意領域連続に写像される；しかしそればかりではない：この写像はまた等角でもある．なぜなら等式(9)は輪環面上の線素 ds と $\varphi\psi$ 平面におけるその像要素$(\sqrt{d\varphi^2+d\psi^2})$との比が $=\sqrt{e}=R+r\cos\sigma$ であること，したがって線素が存在する場所だけには依存するけれども，その向きには依存しないことを述べているからである．この等角写像は輪環面上の解析関数論に対する基礎を与える．——輪環面は閉じている；一つの三角形分割は図2によって与えられる；ただしこの図において，座標軸に平行な辺をもち，太い線で描かれた長方形の辺の長さが 2π および $\dfrac{2\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}$ であるとすればよい．またこの図では $\mathfrak{T}$ の一“点”が∘印によって表わされている．

8. 一つの文字盤の上を動く二つの針の，同じときに占めうる位置は，一つの多様体の点であり，二つの針を同時に，どのような仕方にせよ連続的に動かすならば，この多様体の上に一つの連続曲線が描かれる．この多様体は明らかに閉じており，輪環面に同値である．

9. 位置解析の意味で一つの面が与えられるためには，(それが或る決まった方法で三角形分割されたのちに)それを構成する三角形を何らかの記号(たとえば数字)によって表わし，これらの三角形のつながりを指定すればよい．最も簡単にこれを行なう方法は，頂点に番号を付け，ついで各三角形を(efg)［または(feg)または…］という形に表わすことである；この場合 e, f, g はその三角

形の頂点の番号である[1]．こうしてできる分割表(Schema)は，どの頂点 e_0 も有限個の三角形記号から成るただ一つのサイクル：

$$(e_0e_1e_2),\ (e_0e_2e_3),\ \cdots,\ (e_0e_{h-1}e_h),\ (e_0e_he_1)$$

のなかにだけ現われるという条件を満たすであろう．さらに，頂点の番号を二つの組に分け，どの三角形記号もどちらか一方の組に属する三つの頂点を示すようにすることはできないであろう．これらの条件を満たすような記号(efg)の分割表は，いずれもまた位置解析の意味で決まった面を(それ自身の決まった三角形分割とともに)定める．この抽象的な表わし方は閉じた面に対して特に適している；このときには単に有限個の記号から成る分割表を完全に書き下すことができるからである．許される有限な分割表をすべてつくり上げるということは，純粋に組み合せ論的な問題である．当然のことながら，このような二つの有限な分割表はどのような場合に(異なる三角形分割による)同一の面を表わすかという問題がただちに起こる；この章に含まれる位置解析についての展開がさらに進めば，この問題の解答に対して重要な寄与が得られるであろう．

四面体，したがって球面の分割表は，たとえば

$$(1\ 2\ 3)\qquad(2\ 3\ 4)\qquad(3\ 4\ 1)\qquad(4\ 2\ 1)$$

と書かれる．これとは別に，八面体の三角形分割［図5を参照］によれば，球面は

$$(\mathrm{I}\ 1\ 2)\qquad(\mathrm{I}\ 2\ 3)\qquad(\mathrm{I}\ 3\ 4)\qquad(\mathrm{I}\ 4\ 1)$$
$$(\mathrm{II}\ 1\ 2)\qquad(\mathrm{II}\ 2\ 3)\qquad(\mathrm{II}\ 3\ 4)\qquad(\mathrm{II}\ 4\ 1)$$

という表によって書き表わされる．さきに描かれた三角形分割［図4］によれば，射影平面はつぎの分割表をもつ[2]：

$$(1\ 2\ \mathrm{I})\qquad(2\ 3\ \mathrm{II})\qquad(3\ 1\ \mathrm{III})$$
$$(1\ 2\ \mathrm{II})\qquad(2\ 3\ \mathrm{III})\qquad(3\ 1\ \mathrm{I})$$
$$(1\ \mathrm{II}\ \mathrm{III})\qquad(2\ \mathrm{III}\ \mathrm{I})\qquad(3\ \mathrm{I}\ \mathrm{II})$$
$$(\mathrm{I}\ \mathrm{II}\ \mathrm{III}).$$

10. 解析形体の一つ一つは，われわれの意味における“面”の例を与える；この場合われわれはこの解析形体に属する関数要素を“点”と考え，面の定義

1) Möbius，全集，第2巻，478ページ以下.
2) 始めの二行に挙げられた三角形は，無限遠を通り越して拡がっている．

にあたって要求される"近傍"の概念を，§2でとり扱った"解析近傍"の概念と一致させるのである．この意味において各解析形体が二次元多様体になることはただちに明らかである；なお残された問題として証明しなければならないのは，この多様体にもまたつねに一つの三角形分割を定めることができるということである．

§6. 面としての解析形体.

任意の二次元多様体 $\mathfrak{F}$ の上の三角形 △ は，頂点1, 2, 3をもつユークリッドの三角形 D によって点ごとに表現される；そのためには，23ページで述べたように(△ において)或る決まった座標比 $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ をもつ △ の各点に，頂点1, 2, 3に関する同次重心座標が同じ値 $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ をとるような D の点を対応させればよい．また逆に，$\mathfrak{F}$ 上の点集合 △ がユークリッドの三角形 D の上へ両側から一意連続に写像されるときは，この写像に基づいて △ を $\mathfrak{F}$ 上の三角形ということができる．D のなかにある線分はいずれも，△ のなかだけを通る $\mathfrak{F}$ 上の曲線の像であるが，この曲線を △ のなかの"**基本線分**"という；また D のなかにすっかり含まれるユークリッドの三角形 D^* はいずれも多様体の上の三角形 △* の像である；△* を △ の"**部分三角形**"と呼ぶ．

$\mathfrak{F}$ が決まった方法で基本三角形に分割されているとしよう．この分割を ζ とするとき，同じ多様体の基本三角形へのもう一つの分割 ζ' が始めの ζ の**部分分割**と呼ばれるのは，分割 ζ' の各基本三角形が分割 ζ の或る基本三角形の部分三角形になっている場合である．基本三角形への分割 ζ が与えられたとき，適当な三角形分割の列 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots$ をつくって，1) $\zeta_1=\zeta$ であり，2) 各 ζ_{n+1} は一つ前の ζ_n の部分分割であり，3) n を限りなく大きくするとき分割 ζ_n は**いくらでも細かく**なるようにすることはきわめて簡単である．最後の条件はつぎのことを意味する：$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{F}$ の任意の点，$\mathfrak{U}$ は $\mathfrak{F}$ における $\mathfrak{p}$ の任意の近傍であるとするとき，適当な指数 n をとって，$\mathfrak{p}$ を含むような ζ_n の基本三角形(あるいは例外的な場合として：いくつかの基本三角形)そのものがすっかり $\mathfrak{U}$ のなかに含まれるようにすることがいつでもできる．$\mathfrak{F}$ 上に或る可算無限個の点 $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \cdots$ が与えられているときには，どこまでも細かくなってゆく上記の部分

分割の列を調整して，$\mathfrak{p}_2$ が分割 ζ_2 に際して現われる頂点のうちに含まれ，$\mathfrak{p}_3$ が分割 ζ_3 の頂点のうちに含まれ，以下同様にすることができる．これらの注意をわれわれはすぐに利用するであろう．

まず始めに，$\mathfrak{F}$ に対して三角形分割が可能であるとき，$\mathfrak{F}$ 上の各領域 $\mathfrak{G}$ に対しても(23ページによってそれ自身一つの二次元多様体とみなされうるが)三角形分割が可能であることを示さなければならない．$\mathfrak{F}$ の一つの三角形分割 $\zeta=\zeta_1$ から出発して，これに対する部分分割の列 $\zeta_2, \zeta_3, \cdots$ をつくり，これらの細かさの程度は指数が増すにつれてどのような限界よりも下がるようにしよう．ζ_1 の三角形のうち，$\mathfrak{G}$ の内部にすっかりはいっているものを Γ_1 とする；ζ_2 の三角形のうち，$\mathfrak{G}$ のなかにすっかりはいるが，Γ_1 の部分三角形ではないものを Γ_2 とする；ζ_3 の三角形のうち，$\mathfrak{G}$ のなかにすっかりはいるが，三角形 Γ_1 に対しても Γ_2 に対しても部分三角形ではないものを Γ_3 とする；以下同様．三角形 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \cdots$ のうちには内点を共有するものが全くなく，しかもこれらの全体は集まって全領域 $\mathfrak{G}$ を満たす；これらを共通の名称"三角形 Γ"によって呼ぶこととしよう．一つの三角形 Γ の辺上に，他の三角形 Γ の頂点は有限個しかない．実際，もしも無限個あるとすれば，それらは集積点 $\mathfrak{p}$ をもつはずである．$\mathfrak{p}$ に対しては，$\mathfrak{G}$ のなかにすっかり含まれるような近傍 $\mathfrak{U}$ があり，そこで適当な指数 n をとれば，分割 ζ_n の三角形のうち，$\mathfrak{p}$ を含むものはすべてすっかり $\mathfrak{U}$ のなかに，したがってすっかり $\mathfrak{G}$ のなかにはいってしまう．$\mathfrak{p}$ を含むような ζ_n の三角形の対(または三角形の星)の内部には，場合によっては $\mathfrak{p}$ そのものを除けば，三角形 Γ の頂点はありえない．これは矛盾である．

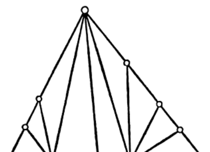


図 9. 部分三角形への分割.

——ここでわれわれの構成法はつぎのように進められる：三角形 Γ のうちの一つを Γ^0 とすれば，Γ^0 を有限個の部分三角形に分割し，しかもこのとき，これらの部分三角形の頂点は，三角形 Γ の頂点のうち，Γ^0 の辺上にあるものの全体と正確に一致させることができる(図 9)．このような分割の手続きを Γ^0

ばかりでなく，すべての三角形 Γ に施せば，その結果として望みどおり基本三角形への $\mathfrak{G}$ の分割が得られる．

全く同じような種類の考え方によって，前節の終わりに予告した通り，二次元多様体とみなされた各解析形体 $\mathbf{G}$ は基本三角形に分割されうるということも，ここでうまく証明される．われわれは z 球面を使って手続きを進めよう；この球面の点には，よく知られた方法(立体射影)により，∞ をも含めて複素変数 z のとる値が対応させられていると考える．$\mathbf{G}$ に属する関数要素：

$$u = \sqrt[\mu]{z-a} \text{ のベキ級数}$$

を，“z 球面の点 $z=a$ の真上にある” $\mathbf{G}$ の点と呼ぶ；u が $\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{z}}$ のベキに展開されているときには，これに対応する関数要素は z 球面の点 ∞ の真上にある．この表現方法に従えば，$\mathbf{G}$ は z 球面の上の或る一つの被覆面，すなわちリーマンが彼の有名な学位論文[1]において，多意の解析関数を研究するために導入し，それ以来“リーマン面”の名の下に，これらの関数に関する理論を支配している一つの形体として現われる．

この球面から特に可算個の点 $a_2, a_3, \cdots$ をとり出そう；そして $\mathbf{G}$ の分岐関数要素(“**分岐点**”)がこれらの点の真上に現われるようにするのである．ζ_1 はこの球面の八分円への分割を意味するとしよう；これらの八分円を §5，例5のように球面上の三角形とみなすことにする；$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots$ は，ζ_1 から始まる球面の三角形分割の列であるとし，ζ_{n+1} はつねに ζ_n の部分分割であり，a_n は分割 ζ_n の頂点として現われ，n が限りなく大きくなるとき ζ_n はいくらでも細かくなるという性質をもつようにする．これらの分割 ζ_n の或る一つに現われる球面上の一つの三角形 D に注目しよう．$\mathbf{G}$ 上の点集合 $\triangle$ において，対応

《$\triangle$ に属する点 $\mathfrak{p}$ → 球面の点(この真上に $\mathfrak{p}$ がある)》

が，$\triangle$ と D の点のあいだの両側から一意連続な写像であるとき，$\triangle$ は D の真上にあって $\mathbf{G}$ に含まれる三角形状の一切片というべきものであろう．この場合 $\triangle$ は上記の写像により $\mathbf{G}$ 上に定められた三角形とみなされる．

われわれはまず始めに，このような $\mathbf{G}$ 上の三角形のうち，分割 ζ_1 に属する球面三角形の真上にあり，分岐点を含まないものを求めて $\triangle_1^*$ とする；このような三角形 $\triangle_1^*$ は，有限個あるいは無限個あることもあろうし，また場合

1) 全集，第2版，7-9ページ．

によっては一つも存在しないかもしれない．つぎにわれわれはこのような G 上の三角形のうち，分割 ζ_2 に属する三角形の真上にあり，たかだか一つの，しかも a_2 の真上にある分岐点だけをもち，三角形 $\triangle_1^*$ の部分三角形ではないものを求めて $\triangle_2^*$ とする；さらにつぎの性質をもつ G 上の三角形 $\triangle_3^*$ を求める：$\triangle_3^*$ はいずれも分割 ζ_3 に属する球面三角形の真上になければならず，たかだかただ一つの分岐点を含むことが許されるが，そのときにはこの分岐点が a_2 または a_3 の真上になければならない；また $\triangle_3^*$ は或る三角形 $\triangle_1^*$ または $\triangle_2^*$ の部分三角形であってはならない；以下同様．三角形 $\triangle^*(\triangle_1^*, \triangle_2^*, \triangle_3^*, \cdots)$ のうちには内点を共有するものが全くなく，これらは集まって面 G の全体を満たす．実際：$\mathfrak{e}$ は G の任意の要素であって，z 球面の点 a の真上にあり，k は a のまわりの頭巾状領域であって，ここでは $\mathfrak{e}$ の正規表現が有効であり，一方指数 n は十分大きく，分割 ζ_n の三角形 D_n のうち a を含むものはいずれも k のなかにすっかりはいり，また $\mathfrak{e}$ が分岐点の場合には，a は点 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ のうちの一つと一致するとしよう：こうすれば，上記のような各三角形 D_n の真上には，$\mathfrak{e}$ を含む G 上の三角形が少なくとも一つある．この G 上の三角形がすでに三角形 $\triangle_1^*$ または $\triangle_2^* \cdots$ または $\triangle_{n-1}^*$ のなかに部分三角形として含まれていないときには，三角形 $\triangle_n^*$ である．

新しい頂点を導入することなく，今度は各三角形 $\triangle^*$ を有限個の三角形に分割し，これによって生ずる三角形 $\triangle$ がなおつぎの性質：一つの $\triangle$ に対して頂点となっている点は，この点を含むすべての(有限個の)三角形においてもやはり頂点であるという性質をもつようにする．これによって G の基本三角形への分割が得られたことを理解するために，容易に証明されるつぎの事実に注意するがよい：

二つの三角形 $\triangle$ が z 球面の同じ一つの三角形の真上にあるならば，これらは共通点を全くもたないか，またはただ一つの頂点だけを共有し，あとの場合この頂点は分岐点である．

二つの三角形 $\triangle$ が z 球面の，共通辺をもつ二つの異なる三角形の真上にあるならば，これらは共通点を全くもたないか，または一つの頂点を共有するか，または一つの辺をそっくり共有する；第二の場合この頂点は分岐点であり，第三の場合この共通辺は二つの球面三角形の共通辺の真上にある．

二つの三角形 △ が共通点のない二つの球面三角形またはただ一つの共通頂点をもつ二つの球面三角形の真上にあるならば，これらは共通点を全くもたないか，または一つの頂点を共有する.

e が一つの三角形の非分岐の頂点であるときには，e を含む三角形 △ の全体はただ一つのサイクルをつくり，このサイクルは三角形ごとに z 球面の一つの星の真上にある．e が $(\mu-1)$ 位の分岐点 $(\mu\geqq 2)$ であるならば，それは e を含むすべての三角形 △ に対して頂点となる；これらの三角形は e のまわりに集まってただ一つのサイクルをつくり，しかもこのサイクルの三角形は μ 個ずつ z 球面の同じ一つの三角形の真上にある.

§7.　リーマン面の概念.

e は $\mathbf{G}$ に属する要素であって，

$$z=P(t),\qquad u=Q(t)$$

は $|t|<r$ $[r>0]$ に対して有効なその表現であるとすれば，$|t|<r$ であるような t の値の一つ一つに対して，e の式：

$$z=P(t+t'),\qquad u=Q(t+t')$$

を t' のベキ級数に展開し直すことによって生ずる要素 e_t が対応する．この対応 $t\to e_t$ は，円 $|t|<r$ から $\mathbf{G}$ における点 e の或る近傍の上への，両側から一意領域連続な写像である：それゆえパラメータ t はこの近傍で定義された $\mathbf{G}$ 上の連続関数とみなされる；これを点 e に属する“**局所一意化変数**(Ortsuniformisierende)”と呼ぶことにしよう．e に属する他の一意化変数 τ はいずれも十分小さい t に対して

$$\tau=\gamma_1 t+\gamma_2 t^2+\cdots\qquad(\gamma_1\neq 0)$$

という形に表わされる．一つの複素数値関数 f が $\mathbf{G}$ の或る領域で定義され，この領域の一点 e の或る近傍において，e に属する局所一意化変数 t の正則なベキ級数：

$$f=a_0+a_1 t+a_2 t^2+\cdots$$

として表わされるとき，f は e において**正則-解析的**であるという．この場合 t がどの局所一意化変数を意味するかは，どうでもよいことである；このよう

な表現が一つの局所一意化変数によって可能であるならば，他のどのような局所一意化変数を使っても，f はまた同じような形に表わされうる(もちろんいつでも，局所一意化変数の選び方に依存する e の或る近傍において表わされるだけである).

関数要素 e の表現のなかの z の展開 $[z=P(t)]$ が，t の負のベキを含まないならば，この展開の最初の定数項 z_0 は e だけによって定まり，要素 e の表現には依存しない；z_0 は複素変数 z の"点" e における**値**であるということにする．さきの展開が t の負のベキで始まるならば，関数要素 e のどの展開においても同じことが起こり，点 e における z の**値**は $=\infty$ である．このように，z は"面" **G** の上で，無限遠の値をとる孤立点を除けばいたるところで定義された一意の正則-解析的な関数と考えられる．全く同じようにして u も，極を除けば **G** 全体で一意に定められた正則-解析的な関数とみなすことができる．これら二つの関数において独立変数の役割を演ずるのは普通の意味における複素変数(すなわち一つの平面領域を動く点)ではなく，"リーマン面" **G** の上を動きうる点である．

z と u が面 **G** の上の解析関数であると主張しうるためには，**G** は単に位置解析の意味における面として与えられたものではないということが本質的に重要である．なぜなら，位置解析的な性質だけしか考えられていない面の上では，連続関数について話すことは当然できるけれども，"連続的に微分可能な"関数や"解析"関数(まして"有理整"関数)その他について話すことはできないからである．一つの面 $\mathfrak{F}$ の上の解析関数論を，複素平面上の解析関数論と同じように展開するためには，さらに(面の定義のほかに)，"この面の上の解析関数"という表現の意味を確定し，平面上の解析関数に関する諸定理のうち"局所的に"成り立つものはすべてこの一そう広い概念の上に移されるような一つの定義が与えられなければならない．ここで"局所的に"成り立つ定理といったのは，その正当さがいつも一点の或る近傍——その大きさについて定理そのものは何の情報も与えない——に対してだけ主張されるようなものである．このように"$\mathfrak{F}$ 上の解析関数"という表現の意味を定義することによって，面 $\mathfrak{F}$ は**リーマン面**になる．リーマン面の概念のこのような解釈は，直観的な形で F. クラインにより彼の著書"Über Riemanns Theorie der algebraischen

Funktionen und ihrer Integrale"[1]においてはじめて展開されたものであり，リーマン自身が解析関数論に関する彼の基本的な仕事のなかで使っている解釈よりも一般的である．しかしこの一般化されたとらえ方により，はじめてリーマンの理念が十分な単純さと力をもって立ち現われるということについて，疑問の余地は全くありえない．これについてはまた，リーマン自身も彼の就任講演[2]において展開した n 次元多様体に関する概念構成を通じて基礎を与えており，リーマンにとってこの講演のなかに繰り拡げられた思想が彼の関数論的研究と密接な関係にあることは，たとえこの関係が彼によって見掛けの上では強調されていなくても，おそらく確実であるとしなければならない．

リーマン面の概念の一般的な定義． ここに一つの面 $\mathfrak{F}$ があり，さらに $\mathfrak{F}$ の任意の点 $\mathfrak{p}_0$ と，$\mathfrak{p}_0$ の任意の近傍で定義された $\mathfrak{F}$ 上の任意の関数 $f(\mathfrak{p})$ に対して，いつ $f(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}_0$ において正則-解析的であるというべきであるかが明確に規定されているならば，これによって一つの**リーマン面** ${}^{\mathfrak{R}}\mathfrak{F}$ が与えられ，$\mathfrak{F}$ の点は ${}^{\mathfrak{R}}\mathfrak{F}$ の点とみなされる．ただし，上記の規定はつぎの条件を満たさなければならない：

1. $\mathfrak{p}_0$ を $\mathfrak{F}$ の任意の点とするとき，一つの関数 $t(\mathfrak{p})$ が存在して，これは点 $\mathfrak{p}_0$ において(0 という値をとり，またここで)正則-解析的であるばかりでなく，$\mathfrak{F}$ における $\mathfrak{p}_0$ の或る近傍に属するすべての点 $\mathfrak{p}$ においてもまた正則-解析的であり，しかも複素 t 平面のなかに，この近傍の両側から一意領域連続な像を描く；このような関数を $\mathfrak{p}_0$ に属する**局所一意化変数**と呼ぶ．

---

1) Leibzig 1882. さらに Klein, Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, Math. Ann., **21** (1883), §§ 1–3 [146-151 ページ] を見よ．境界の対応によって閉じた面は，解析関数の担い手としてすでにそれ以前から現われている (Riemann, "Theorie der Abelschen Funktionen" の Art. 12, 全集 121 ページ；偏微分方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ の積分に関する 1870 年以後の H. A. Schwarz の基本的な仕事の一部，Gesammelte mathematische Abhandlungen, 第II巻，161 ページ；Dedekind, Crelles Journal, 83 (1877), 274 ページ以降を見よ)．空間のなかに自由に置かれた面は，もちろん位置解析的な研究の対象としてだけではあるが，Tonelli (1875；Atti dei Lincei, ser. II, t. 2) と Clifford (1876；Mathematical Papers, 249 ページ以降) によってはじめて扱われた．Klein が彼の著書 "Über Riemanns Theorie" に対する序文 (pag. IV) のなかで打ち明けるところによれば，彼自身が彼の解釈に対する最初のヒントを得たのは，たまたま Prym が会話のなかで与えた一つの注意 (1874) からであるという．Klein によってとり扱われたのはつねに閉じた形体だけである．最も一般的な概念は Koebe においておそらくはじめて明確に見いだされる；たとえば Göttinger Nachrichten, 1908, 338–339 ページ (脚注) を参照．

2) "Über die Hypothesen, welche der Geometie zu Grunde liegen", 全集，第 2 版，272–287 ページ．

2. $f(\mathfrak{p})$は点$\mathfrak{p}_0$において正則-解析的な任意の関数であり，$t(\mathfrak{p})$は$\mathfrak{p}_0$に属する一つの局所一意化変数であるならば，いつでも$\mathfrak{p}_0$の一つの近傍$\mathfrak{U}_0$が与えられ，そのなかでは$f(\mathfrak{p})$が$t(\mathfrak{p})$の正則なベキ級数

$$f(\mathfrak{p}) = a_0 + a_1 t(\mathfrak{p}) + a_2 (t(\mathfrak{p}))^2 + \cdots \tag{10}$$

として表わされる.

これらの要請からつぎのことが明らかにされる：τがtとともに$\mathfrak{p}_0$に属するもう一つの局所一意化変数であるとすれば，$\mathfrak{p}_0$の或る近傍で

$$\tau = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots$$

という表現が成り立たなければならない. ところがまた逆にtもτによって同じような形に表わされなければならないから，必ず$\gamma_1 \neq 0$である. それゆえつねに，関数$f(\mathfrak{p})$の点$\mathfrak{p}_0$における解析性を確かめるには，$\mathfrak{p}_0$に属するただ一つの局所一意化変数$t(\mathfrak{p})$による表現(10)の存在を示せばよい.

任意の二つのリーマン面$\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$が与えられているとき，$\mathfrak{F}_1$を点ごとに$\mathfrak{F}_2$の上へ両側から一意領域連続に移す写像があって，しかも$\mathfrak{F}_1$の任意の一点において正則-解析的な各関数がこの写像により，像点において正則-解析的な$\mathfrak{F}_2$上の関数に移るならば，この写像は**等角写像**と呼ばれる. このように名づける理由はまもなく明らかにされよう. 互いに等角に写像される二つのリーマン面は**(等角に)同値**であって，同じ一つの理想的なリーマン面の異なる具体的表現に過ぎないと考えることにしよう. **一つのリーマン面の内的性質**とみなすことができるものはいつでも，等角写像によって不変な性質，したがって一つのリーマン面$\mathfrak{F}$に属する以上，それと同値なすべてのリーマン面に属するような性質だけである. すべての位置解析的性質がこの意味におけるリーマン面の内的性質に属することは自明である.

一つのリーマン面の各部分領域はそれ自身一つのリーマン面である. 一点$\mathfrak{p}$に属する局所一意化変数はいずれも$\mathfrak{p}$の或る近傍を一つの平面領域の上へ等角に写像する. この場合，平面も同時にリーマン面と解さなければならない；しかもこの解釈は，複素ガウス平面における解析関数という初等的な概念に適合するものでなければならない.

われわれはさきに，どのような意味において解析形体をリーマン面とみなすことができるかを論じた. しかし“解析形体”という概念と“リーマン面”とい

う概念は一致しない. 一つの解析形体(z, u)によって, われわれには単に一つのリーマン面が与えられるばかりでなく, それとともにこの面上で極を除いて正則な二つの関数 z と u が同時に与えられる. この際 z と u はつぎの条件を満たす: このリーマン面上の異なる二点 $\mathfrak{p}_1^0, \mathfrak{p}_2^0$ と, それぞれに属する局所一意化変数 t_1, t_2, および t の整のベキによって展開された二つの級数 $P(t)$, $Q(t)$ が存在して,

$$\mathfrak{p}_1^0 \text{ の近傍では } z = P(t_1),\ u = Q(t_1),$$
$$\mathfrak{p}_2^0 \text{ の近傍では } z = P(t_2),\ u = Q(t_2)$$

となることはありえない. 任意のリーマン面に対して, 何らかの方法により極を除いて正則な二つの関数 z, u を選び出すとき, これがいま定式化した条件を満たすならば[1], これによっていつでも一つの解析形体が得られる. ところでこのような関数対 z, u がともかく一つ存在するときには, これはいつでもまた無限に多くの異なる方法で選ばれる; たとえば z, u の代りに, 私は z, u の任意の二つの線形結合:

$$z' = az+bu, \qquad u' = Az+Bu$$
$$[a, b; A, B \text{ は定数}; aB-bA \neq 0]$$

を用いることができる. 与えられた各リーマン面に実際一つの関数対(z, u), すなわち一つの解析形体が属するということ, これはリーマンの関数論における基本事項であるが, 閉じたリーマン面に対するその証明は, この本の第 II 章において, 同じ目的のためにリーマンが利用したトムソン-ディリクレの原理の助けを借りて行なわれるであろう[2].

われわれはいまから, リーマン面上の関数と曲線の挙動に関する不変な概念を二, 三列挙しよう.

点 $\mathfrak{p}_0$ において正則な関数 $f(\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{p}_0$ に属する局所一意化変数 t のベキによって展開するとき, この展開が項 $a_m t^m$ $(a_m \neq 0)$ から始まるならば, $\mathfrak{p}_0$ は f の m **位の零点**である. また, f は点 $\mathfrak{p}_0$ において**位数** m をもつともいう. $\tau(\mathfrak{p})$ が $\mathfrak{p}_0$ に属する任意の他の局所一意化変数ならば,

---

1) (訳注) 各点において(z, u)が局所的に関数要素であることは暗黙のうちに仮定されているのであろう.

2) (訳注) 一般の場合については, S. Stoïlow, Leçons sur les principes topologiques de la théorie de fonctions analytiques, Gauthier-Villars, 1938 を見よ.

$$t = c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots \qquad (c_1 \neq 0)$$

となり，τ のベキによる f の展開は $a_m c_1{}^m \tau^m$ という項から始まる；このことから，零点の位数 m の“不変性”が出て来る．点 $\mathfrak{p}_0$ の或る近傍から点 $\mathfrak{p}_0$ 自身を除いたところで，関数 $f(\mathfrak{p})$ が展開

$$f = \frac{a_{-n}}{t^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \cdots$$

$$[a_{-n} \neq 0, n \text{ は整数で } > 0]$$

を許すならば，f は点 $\mathfrak{p}_0$ において n **位の極**をもつ；また，f は点 $\mathfrak{p}_0$ において**位数** $-n$ をもつともいう．不変性の証明は上と同じである．関数 $f(\mathfrak{p})$ が点 $\mathfrak{p}_0$ において位数 $k(\gtreqless 0)$ をもち，$g(\mathfrak{p})$ が位数 l をもつならば，$f \cdot g$ は $\mathfrak{p}_0$ において位数 $k+l$ を，$\dfrac{f}{g}$ は位数 $k-l$ をもつ．

点 $\mathfrak{p}_0$ の近傍からこの点自身を除いたところで一意関数 f が正則-解析的であるとすれば，点 $\mathfrak{p}_0$ においてこの関数に上記の値を割り当てることができるか——すなわちこの関数は $\mathfrak{p}_0$ においても正則であるか，または $\mathfrak{p}_0$ において極をもつか——，またはこの関数はここで**真性特異点**をもつ．最後の場合，$f(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}_0$ の各近傍において，すべての値にいくらでも近づく．

z, u がこのリーマン面の一つの領域 $\mathfrak{G}$ において，極を除いて正則な二つの関数であるとき，z と u の各有理式 $R(z, u)$ もまた極を除いて正則である．なぜなら，z, u のところに，この領域の一点に属する局所一意化変数 t のベキによるこれらの展開式を代入すれば，$R(z, u)$ に対しても，t の整のベキによって展開された級数が得られ，この級数は負のベキをたかだか有限個しか含まないからである．それゆえ，R に対して直接に z と u の値を代入するときには，さしあたって $\dfrac{0}{0}$ という形の不定形が得られるようなところでも，本当は不定になる点が現われるのではない．

一つの実関数 U が点 $\mathfrak{p}_0$ において**調和関数**あるいは**ポテンシャル関数**と呼ばれるのは，この点において正則-解析的な関数が存在して，その実部と U が $\mathfrak{p}_0$ の或る近傍において一致する場合である．一つの領域のすべての点において U が調和であり，しかも $=$定数 ではないとき，この領域のどの点においても，U は最大値または最小値をとることができない．それゆえ閉じたリーマン面の上では，定数関数のほかに，いたるところで調和な(一意)関数は存在せず，

ましていたるところで正則-解析的な(一意)関数は存在しない. ――一つの実関数 U が点 $\mathfrak{p}_0$ において**連続的に微分可能**であるためには, $\mathfrak{p}_0$ の或る近傍において U を $\mathfrak{p}_0$ に属する局所一意化変数 $t=x+iy$ (x, y は実)の関数とみなすとき, 十分小さな $|t|$ の値に対して U が連続な一階の微分商 $\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ をもたなければならない. この判定法を適用する際にどの局所一意化変数を使ったかは, もちろんどうでもよいことである. 同じようにして, われわれは2回, 3回, … 連続的に微分可能な関数について話すことができる.

曲線 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}(\lambda)$ $[0\leqq\lambda\leqq 1]$ 上の一点 $\mathfrak{p}(\lambda_0)=\mathfrak{p}_0$ の或る近傍が, $\mathfrak{p}_0$ に属する局所一意化変数 t によって一対一にそして等角に t 平面の或る領域に写像されるとき, この近傍において曲線は $t=t(\lambda)$ という形に表わされる. λ_0 の十分近くにあって, 区間(0 1)に属するすべての実の λ に対して, $t(\lambda)$が一つの収束するベキ級数 $b_1(\lambda-\lambda_0)+b_2(\lambda-\lambda_0)^2+\cdots$ と一致し, しかも $b_1=\left(\dfrac{dt}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}\neq 0$ であるとき, この曲線は $\lambda=\lambda_0$ **において解析的**であるといわれる. 不変性の証明は何でもない. $t=b_1\tau+b_2\tau^2+\cdots$ によって定められるパラメータ τ を局所一意化変数として使うことによって, $\mathfrak{p}(\lambda_0)$を含む曲線の或る切片が, τ 平面においては実軸の一切片として現われる. **解析曲線**というときはただちに, 0から1までを動くパラメータ λ のすべての値において解析的であるような曲線を意味するものとする.

λ_0 の十分近くにあって区間(0 1)にはいる λ の値に対して微分商 $\dfrac{dt}{d\lambda}$ が存在し, これが λ について連続であり, しかも $\lambda=\lambda_0$ に対しては0でない値をとるということだけが知られているときには, この曲線は λ_0 **において連続的に微分可能**であるといわれる.

(11)
$$\overset{1}{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}(\lambda),\qquad \mathfrak{p}=\overset{2}{\mathfrak{p}}(\lambda)$$

は同じ点 $\mathfrak{p}_0=\overset{1}{\mathfrak{p}}(0)=\overset{2}{\mathfrak{p}}(0)$ から出発し, $\lambda=0$ において連続的に微分可能な二つの曲線であるとし,

$$t=\overset{1}{t}(\lambda),\qquad t=\overset{2}{t}(\lambda)\qquad [0\leqq\lambda\leqq\lambda_1]$$

は $\mathfrak{p}_0$ に属する局所一意化変数 t の平面におけるこれら両曲線の始めの弧の像であるとするとき, t 平面の原点においてこれら二つの弧が互いにつくる角 ϑ は等式

$$\left(\frac{d\overset{1}{t}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = r_1 e^{i\vartheta_1}, \qquad \left(\frac{d\overset{2}{t}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = r_2 e^{i\vartheta_2}$$

$[r_1, r_2 > 0\,; \vartheta_1, \vartheta_2$ は実数$]$,

$$\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

により，2π の整数倍を除いて定められるが，これをまたリーマン面上の点 $\mathfrak{p}_0$ から出る二つの曲線(11)のあいだの**角**ということにしよう．この角測度が一つの不変量であることは，一つの局所一意化変数 t からもう一つの τ への移行が，t 平面の原点を含む一つの領域から τ 平面の同様な領域の上への，角を保存する写像によってもたらされることによる．それゆえ，リーマン面の上には不変な角測度が存在する[1]．このように角測度を導入した結果，上に定義された“等角”写像の概念は，角を保存する一対一の写像という概念と一致する．

球面や輪環面のように，特異点のないユークリッド空間内の曲面の上では，(回転の向きについての規約を設ければ)一定の自然なユークリッドの角計量が存在するが，この曲面をリーマン面とみなし，上に述べた手続きによって与えられるリーマン面としての角計量と自然な角計量とを一致させることができ，しかも結果はただ一通りである．この際，問題の曲面上にある各点の一つの近傍を平面領域の上へ，(ユークリッドの意味において)角を保存しながら写像することができるという事実を確かめなければならない[2]．

球面については立体射影によって，ただ一つの1位の極を除き全球面上で正則な関数 z が与えられ，この関数は ∞ をも含めてすべての値を1回ずつとる．球面上で極を除いて正則なその他の関数はいずれも z の有理関数であり，その結果球面上で極を除いて正則な関数の理論は本質的に一変数 z の有理関数の理論と一致する．独立変数 z の選び方はもちろん或る程度まで自由である；なぜ

1) 或る意味においては，同じような長さの計量も存在する；この事実は“一意化”の理論から得られ，深い意味をもつ．この本の §§19, 20 を参照．

2) L. Lichtenstein, Beweis des Satzes, das jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in der kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann, Abhandlungen der K. Preuß. Academie der Wissenschaften vom Jahre 1911, Anhang を参照．――困難が起こるのは，空間曲面が頂点をもつ場合である．この問題については，H. A. Schwarz のさきに挙げた仕事，Gesammelte Abhandlungen, 第2巻, 161 ページを参照せよ；その解決は Koebe, Göttinger Nachrichten 1908, 359–360 ページと R. König, Mathematische Annalen, 71 (1912), 184–205 ページに見いだされる．

ならzのほかに，zから線形変換

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \qquad [a, b, c, d \text{ は定数；} ad-bc \neq 0]$$

によって得られる関数 z' はいずれもまたこの役割に適するからである．真性特異点をもたない解析関数の零点と極の位置および重複度は，零点の位数の和と極の位数の和が一致する限り，球面上で自由に指定することができる．

輪環面の上では全く異なった事情が生ずる(第 II 章を参照)．一方では輪環面上の関数，他方では球面上の関数の挙動のあいだに存在する大きな相違の根本的な原因としては，ほとんどつねにただ一つの事情(関数論の領域ではなく，位置解析の領域に属する事情!)，すなわち輪環面の上では，互いに一点で交わる二つの閉曲線から成る系をつくり(§5, 例7の表現では $\varphi=0$ と $\psi=0$)，この系によって輪環面が分割されないようにすることができる——他方，球面上ではこのような系が存在しないという事情が指摘される．輪環面を点格子多様体 $\mathfrak{T}$(§5)の上へ等角に写像すれば，輪環面上で真性特異点をもたない関数は複素変数 $w=\varphi+i\psi$ の関数として一意，極を除いて正則であり，しかも周期 2π, $\frac{2\pi ir}{\sqrt{R^2-r^2}}$ をもつ二重周期関数，すなわち(純虚の周期比 $=\frac{ir}{\sqrt{R^2-r^2}}$ をもつ)楕円関数とみなされる．

位置解析の意味における面としては，二つの輪環面はつねに同値である．しかしながらこれらを互いに等角に写像することは一般には不可能であり，これが可能になるのは，二つの輪環面に対して“モジュラス” $\frac{r\sqrt{R^2-r^2}}{R^2}$ が同じ値をとるときであり，またそのときに限る．ここで“**モジュラス**(Modul)”という言葉はつぎの意味をもつ：位置解析の意味ではすべて互いに同値なリーマン面から成る一つの族において，それらの面の一つ一つに何らかの方法によって一つの数が対応させられ，しかもこの族に属する二つの面が等角同値である場合には，それらに対応する数がつねに同じであるならば，上記の数をこの族のリーマン面に依存するものと考え，この族のモジュラスと呼ぶ．リーマン面の位置解析の意味における同値が，一般的にいえば，等角同値を意味しないという事実は，原理的に重要である．——或る輪環面の点をわれわれは，周期 2π と $2\pi ia_1=2\pi i\frac{r_1}{\sqrt{R_1{}^2-r_1{}^2}}$ をもつ w_1 平面の点格子として表わし，第二の輪環面の点を周期 2π と $2\pi ia_2$ $[a_2>0]$ に対応する w_2 平面の点格子として表わすことに

しよう. 一つの輪環面からもう一つの輪環面の上への等角写像があるとすれば, 各格子 w_1 に一つの格子 w_2 が対応し, しかも格子 w_1 に無限小移動 dw_1 を施すとき, 像格子 w_2 は無限小移動 dw_2 を行ない, その dw_1 に対する比 $\frac{dw_2}{dw_1}$ は格子 w_1 だけによって定まり, 移動 dw_1 の方向にはよらない; この比を格子 w_1 の従属変数とみなせば, これは第一の輪環面上の正則-解析的な関数であり, したがって = 定数 $=A$ である. その結果, 上記の等角写像は

(12) $$w_2 = Aw_1 + B \qquad [A, B \text{ は定数}]$$

という式によって表わされるはずである; ただし(12)において, 一つの w_1 格子に属するすべての点を w_1 のところに代入するとき, いつでも対応する w_2 格子に属するすべての点が得られるという意味に解する. 数論的性格をもつ簡単な格子の考えによって, このことが可能になるのは, $A=\pm 1$ または $=\pm\frac{i}{a_1}$ のときだけであることがわかる; 第一の場合は $a_2=a_1$, 第二の場合は $a_2=\frac{1}{a_1}$ となるであろう. それゆえ, いずれの場合にせよこれら二つの輪環面のあいだの等角写像が可能であるためには, 等式

$$a_1 + \frac{1}{a_1} = a_2 + \frac{1}{a_2}$$

が必要な(そして明らかに十分な)条件である.

$$\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}} + \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r} = \frac{R^2}{r\sqrt{R^2-r^2}}$$

であるから, このことはわれわれの主張と一致する.

この節を終わるにあたって, リーマン面の理念に関する二, 三の一般的な注意を述べよう. この理念の導入の基礎にある基本的な考え方は, 決して複素関数論に制限されてはいない. 二つの実変数 x, y の関数は平面上の関数である; しかしながら, 球面上の, あるいは輪環面上の, あるいは一般に一つの面の上の関数を研究することも, 平面上の関数の研究と全く同じように正当な理由をもつことは確かである. もちろん, 関数の“局所的な”挙動だけを問題としている限りは——そして解析学の考察は大部分このような問題に関するものであるが——, 一般に二つの実変数の関数という概念で足りる; 二次元多様体の各点の近傍は x, y (または $x+iy$) によって表現されるからである. しかし関数の“大域的な”挙動の研究に立ち入るならばただちに, 平面上の諸関数はそれと

同じように正当な権利をもつ無限に多くの他の関数にまじって，一つの重要な，しかし特殊な場合を構成する；リーマンとクラインは，この特殊な場合にとどまっていてはならないことをわれわれに教えた．複素関数論に適用すれば，これはつぎのようになる：或る種の関数の研究にはいる前に，いつでもまず独立変数の変域の役割を果たす面が定義されなければならない；それから，この面上で“解析関数”と呼ばれるべきものが明確に述べられ，それによってこの面がリーマン面にならなければならない；そしてこのときはじめてわれわれは関数そのものに手をつけることができる．このことに対応して，関数に即していえばつぎの三つの異なる段階の性質に留意することが必要である：1. これは最も決定的なものである：すなわちこれらの関数が存在するリーマン面の位置解析的性質，2. このリーマン面の，位置解析の領域に属さない内的な性質（たとえば“モジュラス”の決まった値），3.（たとえば零点と極の位置や位数のように）同じリーマン面上の諸関数をそれらの挙動に関して区別するような性質．この立場から見れば，ワイヤストラスの解析形体の概念は二次的な役割しか演じない：これは同一のリーマン面上に存在する二つの関数を組み合わせることによりはじめてでき上るものである．それならば一つのリーマン面上を動く点の関数として，ただ二つの関数の代りに，たとえば三つまたは四つ，あるいはさらに多くの関数をも同時に考えることは，自然な歩みである．この歩みを進めることは，幾何学的にいうと，平面解析“曲線”の研究から三次元，四次元などの空間における曲線の研究に移ること以外の何ものでもない[1]．

一つのリーマン面 $\mathfrak{F}$ の上で一意の，極を除きいたるところで正則な関数を，われわれは多くの場合簡単に“**この面の上の関数**”ということにしよう．閉じたリーマン面に対しては，第 II 章でこれらすべての関数に関する一つの概観を得るであろう．しかしまたつぎのようにもっと一般的な関数のクラスを $\mathfrak{F}$ に属するものとして考慮に入れることもできる：$\mathfrak{F}$ 上に一つの関数要素（すなわち $\mathfrak{F}$ の一点 $\mathfrak{p}_0$ に属する局所一意化変数 t の整数ベキによって展開されたベキ級数）を与えるとしよう；このとき，平面の場合に対して §1 に述べた解析接続と同じような方法により，$\mathfrak{F}$ 上にとりうるすべての道に沿ってこの関数要素を解析的に接続しようと試みることができる．すべての道に沿ってこのような

1)（訳注） H. Weyl - J. Weyl, Meromorphic functions and analytic curves, Princeton, 1943.

解析接続が一意的に可能であるとき，いいかえれば，たかだか極には出会うとしても，そこからさきへの接続がどうしても不可能になる点（“自然境界”）や多意になる点（$\mathfrak{F}$ に対する分岐）には決して出会わないとき，これによって生ずる関数が一意であるということは，輪環面上の例 $w=\varphi+i\psi$ が示すように，決して必要でない；そして一般には，$\mathfrak{F}$ の真上に，境界もなく分岐もなく拡がった或る一つの被覆面の上で考えるとき，このような解析接続によって得られた関数ははじめて一意になる．ところで多くの問題，特に一意化の理論にあたっては，$\mathfrak{F}$ 上の一意関数から成る領域を拡張して，$\mathfrak{F}$ 上で分岐せず，真性特異点と自然境界をもたないすべての（有限または無限多意）関数から成る領域を考えることがきわめて重要である．この章の残りは関数論の基礎に横たわる位置解析の諸問題に当てられるが，そこでは一つ一つの面 $\mathfrak{F}$ とともに，それに属する被覆面を同時に考えなければならない；このような任務をわれわれに負わせるのは上記の事情である．

§8. 単 葉 型 の 面.

一つの三角形分割 ζ が定められている面 $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{F}_\zeta$ と書き表わそう．ζ の一つの三角形 $\triangle$ にすっかり含まれるような，$\triangle$ のなかの基本線分（§6, 34 ページを見よ）はいずれも $\mathfrak{F}_\zeta$ **の上の基本線分**として用いられる．基本線分の両端のうち，一方を始点，他方を終点と定めることによって，この線分には**向き**が付けられる．有限個の基本線分 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ が一つの**折れ線**をつくるのは，σ_h の終点がいつも σ_{h+1} の始点と一致する（$h=1, 2, \cdots, n-1$）ときである．一つの折れ線に属するどの二つの線分も，それらの一つがもう一つのつぎに来るときだけ一つの（そしてまたただ一つの）点を共有するならば，この折れ線は**それ自身を横切らない**：すなわち“**単純な**”折れ線である．σ_n の終点が σ_1 の始点と一致するならば，この折れ線は**閉じている**；このとき σ_1 は σ_n のつぎの線分である（循環する順序づけ）．閉じた折れ線において，一つの線分がもう一つの線分のつぎに来るときだけ二線分が共通点をもつならば，この折れ線は**多角形**といわれる．

$\mathfrak{F}_\zeta$ の上の領域 $\mathfrak{G}$ に属する二点は，$\mathfrak{G}$ のなかだけを通る単純な折れ線によっ

ていつでも結ばれる．実際，まずはじめに，$\mathfrak{G}$ のなかだけを通る曲線 γ によってこれら二つの点を結ぶことができる．分割 ζ から十分細かい部分分割 ζ' をつくって，γ と点を共有する ζ' の基本三角形がすべて $\mathfrak{G}$ に含まれるようにすることもできる．25ページ以下に述べた構成法によって，分割 ζ' の三角形から成る単純な鎖をつくり，γ の始点が含まれている ζ' の三角形を，γ の終点が含まれている三角形と結びつける．この三角形の鎖はこのときただちに単純な折れ線に置き換えられ，この折れ線は，鎖に属する三角形を順にそれぞれ一つの線分に沿って横断する．——さらに：σ が $\mathfrak{F}_{\zeta}$ 上の任意の折れ線であるとき，ζ の部分分割 ζ' を適当に定めることによって，σ を構成する線分が分割 ζ' の辺になる（あるいは，ζ' の辺をいくつかつないだものになる）ように，したがって σ が $\mathfrak{F}_{\zeta'}$ の**辺の折れ線**(Kantenzug)となるようにできる．

$\mathfrak{F}$ 上の閉集合 $\mathfrak{E}$ について，それが $\mathfrak{F}$ を**分けない**というのは，$\mathfrak{E}$ に属さない $\mathfrak{F}$ の点全体がただ一つの領域をつくるときである．単純な折れ線 σ は $\mathfrak{F}_{\zeta}$ を分けない．これを証明するために，σ が辺の折れ線とみなされるような，ζ の部分分割 ζ' をつくる．このとき σ に接触する ζ' の三角形に通し番号 1, 2, 3, …を付け，この番号が続いているどの二つの三角形も，σ に属さない一辺を共有するようにできる．図によって，このような番号づけの始めの部分が示されている[1]．私がいいたいのは，$\mathfrak{F}$ の任意の二点 $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ が σ と出会わない連続曲線によって結ばれるということである．私は $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{F}$ 上の曲線 γ によって結ぶ．

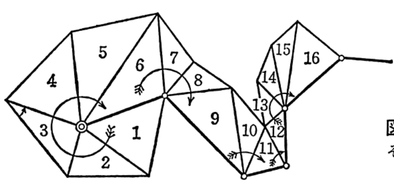


図 10. 単純な折れ線とそれに接触する三角形.

γ が折れ線 σ と出会うならば，最初の共通点を $\mathfrak{p}'$，最後の共通点を $\mathfrak{q}'$ とし，$\mathfrak{p}'$ の直前に γ 上の一点 $\mathfrak{p}''$ をとって，$\mathfrak{p}''$ が σ に接触する三角形の一つにはいるようにする；また $\mathfrak{q}'$ の直後に γ 上の一点 $\mathfrak{q}''$ をとって，$\mathfrak{q}''$ もやはりそのよ

1) もちろんこの際，同じ一つの三角形が場合により二回以上異なる番号を付けられて現われるということは，必ずしも避けられないであろう．

うな三角形のなかにあるようにする．このとき上に述べた三角形の番号づけの助けを借りて，私は $\mathfrak{p}''$ と $\mathfrak{q}''$ を一つの折れ線によって結び，この折れ線が σ に出会うことなく，σ に接触する三角形をその番号の順に通過するようにできる．この折れ線は γ の弧 $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ および弧 $\mathfrak{q}''\mathfrak{q}$ とともに一つの曲線をつくり，これがわれわれの求めるものになる．

$\mathfrak{E}$ は $\mathfrak{F}_\zeta$ を分けない閉集合であり，σ は $\mathfrak{F}_\zeta$ 上の基本線分であって，その両端点は $\mathfrak{E}$ と共有するが，それ以外の点を共有しないとき，合併集合 $\mathfrak{E}+\sigma$ は面 $\mathfrak{F}$ を全く分けないか，または二つの領域に分ける．私はこの証明にあたって，σ は ζ の二つの三角形 $\triangle_1$，$\triangle_2$ の共通辺であると考えることができる．$\mathfrak{p}_0$ は σ の一点であるが，どちらの端点でもないとし，$\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_1$ は $\triangle_1$ の内部へ引かれた小さな基本線分であって，$\mathfrak{E}$ とは共通点を全くもたないとし，$\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_2$ は $\triangle_2$ の内部へ引かれた同様な線分であるとする．私はつぎのことをいいたい：$\mathfrak{E}+\sigma$ に属さない $\mathfrak{F}$ の各点 $\mathfrak{p}$ は，$\mathfrak{E}+\sigma$ を越えることなく，$\mathfrak{q}_1$ または $\mathfrak{q}_2$ と結ばれる．私はまず $\mathfrak{E}$ を越えることなく，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{q}_1$ と曲線 γ によって結ぶ．この際私が σ と出会うならば，はじめて出会う点を $\mathfrak{p}_1$（これは σ のどちらの端点でもありえない!）とするとき，私は $\mathfrak{p}_1$ の直前に一点 $\mathfrak{p}_1'$ を定め，γ の部分弧 $\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_1$ がすっかり $\triangle_1$ にはいるか，またはすっかり $\triangle_2$ にはいるようにできるであろう．これら二つの場合のうちのどちらが起こるかによって，私はこの弧から，$\mathfrak{E}$ にも σ にも出会うことなく，$\triangle_1$ または $\triangle_2$ のなかにあるただ一つの基本線分に沿って，線分 $\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_1$ または $\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_2$ に到達することができる．——特に，$\mathfrak{q}_1$ が $\mathfrak{q}_2$ と（すなわち σ の一つの“岸”にある一点がもう一つの“岸”にある一点と）$\mathfrak{E}+\sigma$ を越えることなく結ばれるときには，$\mathfrak{F}$ は一般に $\mathfrak{E}+\sigma$ によって分けられない．

すぐ上の二つの段落で証明された事実を結びつけることによって，各多角形は面 $\mathfrak{F}_\zeta$ をたかだか二つの領域に分けるという結果が得られる；なぜなら，多角形は一つの単純な折れ線（$\mathfrak{E}$）にただ一つの線分（σ）をつけ加えることによって生ずると考えることができるからである．$\mathfrak{F}_\zeta$ が実際にどの多角形によっても分けられるとき，面 $\mathfrak{F}$ は（Koebe に従って）**単葉型**であるという．単葉型でない面が存在することは，輪環面の例によって示される．

定理：面 $\mathfrak{F}$ が三角形分割 ζI において単葉型ならば，この面が任意の他の方法 ζII によって基本三角形に分割された場合にもやはり単葉型である．

“線分”, “多角形” などのように, 一方または他方の分割法に関係する概念を区別するために, I または II をつけ加えよう. $\mathfrak{F}$ が三角形分割 ζII において単葉型でないとすれば, $\mathfrak{F}$ を分けない II-多角形 π_{II} が存在するはずである. σ_{II} は π_{II} に属する一つの線分であるとし, これについてわれわれは, 場合により端点を除きさえすれば, これが一つの三角形 $\triangle_{\mathrm{II}}$ の内部を通ると仮定することができる[1]. この三角形 $\triangle_{\mathrm{II}}$ の内部にすっかりはいる一つの II-基本線分 $\tau_{\mathrm{II}}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ によって σ_{II} を横切り, その交点を $\mathfrak{p}$ としておく(図 11). $\mathfrak{q}'$ は $\mathfrak{q}''$ と一つの連続曲線により, したがってまた一つの単純な I-折れ線——これを Σ_{I} と呼ぼう——により, π_{II} を越えずに結ばれる. Σ_{I} はその両端点を除けば線分 τ_{II} と共通点をもたないと仮定してよい[2].

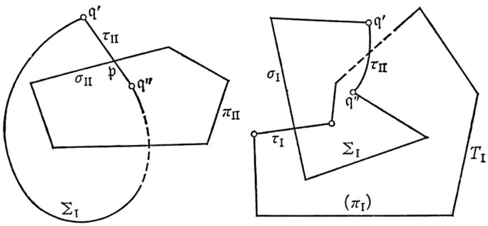


図 11. 単葉型という性質が不変であることを証明するために.

Σ_{I} はこの面を分けず, 多角形 π_{II} は(これから点 $\mathfrak{p}$ を含む小さな線分を除き去るとき) τ_{II} の一つの岸にある一点をもう一つの岸にある一点に, $\Sigma_{\mathrm{I}}+\tau_{\mathrm{II}}$ を越えないで結ぶから, $\mathfrak{F}$ は $\Sigma_{\mathrm{I}}+\tau_{\mathrm{II}}$ によって分けられない. そこで私は Σ_{I} に属する一つの線分 σ_{I} に注目し, これについてもまた, これが I-三角形の辺ではないと仮定することができる; σ_{I} を含む I-三角形のなかで, 私は小さな I-線分 τ_{I} によって σ_{I} を横切り, $\Sigma_{\mathrm{I}}+\tau_{\mathrm{II}}$ を越えない単純な折れ線 T_{I} によって τ_{I} の両端点を結ぶ. T_{I} は τ_{I} と端点だけしか共有しないと仮定してよい:

---

1) なぜなら, π_{II} のすべての線分が辺であるときには, それらのうちの任意の一つ σ_{II} をとり, σ_{II} で隣り合う二つの三角形の一方のなかで, 一度だけ屈折する折れ線をひいて σ_{II} に置き換え, しかも $\mathfrak{F}$ を分けないという性質を π_{II} が失わないようにすることができるからである.

2) 事実, そうでなければ, Σ_{I} に沿って $\mathfrak{q}'$ から $\mathfrak{q}''$ の方へ動くとき, 線分 $\mathfrak{p}\mathfrak{q}'$ と最後に出会う点を $\overset{*}{\mathfrak{q}}'$, その瞬間以後にはじめて線分 $\mathfrak{p}\mathfrak{q}''$ に出会う点を $\overset{*}{\mathfrak{q}}''$ とし, またこれら二つの出来事のあいだに通過する Σ_{I} の部分を Σ_{I}^* とする: このとき Σ_{I}^* は $\overset{*}{\tau}_{\mathrm{II}}=\overset{*}{\mathfrak{q}}'\overset{*}{\mathfrak{q}}''$ という II-線分と端点しか共有しないから, われわれは Σ_{I} を Σ_{I}^* に, τ_{II} を $\overset{*}{\tau}_{\mathrm{II}}$ に置き換えることができるであろう.

このとき $\pi_{\rm I}=T_{\rm I}+\tau_{\rm I}$ は $\mathfrak{F}$ を分けない I-多角形である；なぜなら，曲線 $\Sigma_{\rm I}+\tau_{\rm II}$ によって，$\tau_{\rm I}$ の両岸において互いに向かいあう二点が $\pi_{\rm I}$ を越えないで結ばれるからである．それゆえ $\mathfrak{F}$ は三角形分割 ζI においてもまた単葉型でなかったことになる[1]．

§9. 被覆面．単連結の面．一意性の定理とコーシーの積分定理．

単葉型の概念よりなお一そう強いのは単連結の概念であって，これは被覆面の構成と密接な関係にある．一つの面 $\mathfrak{F}$ が "**基礎面**(Grundfläche)" として与えられているとき，別の面 $\bar{\mathfrak{F}}$ 上の各点 $\bar{\mathfrak{p}}$ に，$\mathfrak{F}$ 上の点 $\mathfrak{p}$ が $\bar{\mathfrak{p}}$ の "**射影点**(Spurpunkt)" として一つずつ対応させられているならば，面 $\bar{\mathfrak{F}}$ を $\mathfrak{F}$ の真上にある**被覆面**と呼ぶことにしよう；このときまた，$\bar{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ **の真上にある**[2] (liegt über) という．われわれが $\bar{\mathfrak{F}}$ は ($\mathfrak{F}$ に対して) **非分岐**[3]であるというときには，いつでもこの対応がつぎの条件を満たしていなければならない：$\bar{\mathfrak{p}}_0$ が $\bar{\mathfrak{F}}$ の任意の一点ならば，いつでも $\bar{\mathfrak{F}}$ における $\bar{\mathfrak{p}}_0$ の或る近傍が存在して，この近傍はさきの対応により，$\mathfrak{F}$ の或る領域の上へ一対一にそして両側から領域連続に写像される．$\bar{\mathfrak{F}}$ がこの意味で $\mathfrak{F}$ の真上にある非分岐な被覆面を表わすとしよう．$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}(\lambda)$ $[0\leqq\lambda\leqq1]$ は $\mathfrak{p}_0=\mathfrak{p}(0)$ から出発する $\mathfrak{F}$ 上の曲線 γ, $\bar{\mathfrak{p}}_0$ は $\mathfrak{p}_0$ の真上にある $\bar{\mathfrak{F}}$ の一点であるとする．このとき (§1 を参照) つぎの二つの場合が起こりうる：

第一の場合：$\bar{\mathfrak{p}}_0$ から出発する $\bar{\mathfrak{F}}$ 上の連続曲線 $\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{p}}(\lambda)$ $[0\leqq\lambda\leqq1]$ で，パラメータ λ のどの値に対しても点 $\bar{\mathfrak{p}}(\lambda)$ が点 $\mathfrak{p}(\lambda)$ の真上にあるようなものがただ一つ存在する；

第二の場合：一つの敷居 $\Lambda_0 (0<\Lambda_0\leqq1)$ が存在して，$\lambda_0<\Lambda_0$ に対する γ の部

1) これによってわれわれは，単葉型の面(特に平面)の上にある単純な閉曲線はいずれもこの面を分けるということを主張する "Jordan の曲線定理" について，その一部を証明したことになる．C. Jordan の Cours d'analyse, 第2版，第 I 巻，91–99 ページにある彼自身の最初の(不完全な)証明のほか，特に Brouwer, Math. Ann., **69**(1910), 169–175 ページを見よ．

2) (訳注) '上にある' といってもよいのであるが，'$\mathfrak{F}$ の上の点' などという慣用の表現と区別するために '真上にある' としておく．

3) この言葉はもともと，定義が明確に述べなければならないものを，完全には表現していない；もっと正確に(しかしまたもっとまわりくどく)いえば，"枝分かれせず，折り返されず (unverzweigt und ungefaltet)" ということになろう．

分弧 $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$ の真上には，いつでも確かに $\bar{\mathfrak{p}}_0$ から出発する $\bar{\mathfrak{F}}$ 上の曲線が一つ（そしてまたただ一つ）あるけれども，$\lambda_0 \geqq \Lambda_0$ となればもはやこのことが起こらない．第二の場合はつぎのように解釈することができる：$\bar{\mathfrak{p}}_0$ から出発する点 $\bar{\mathfrak{p}}$ が $\bar{\mathfrak{F}}$ 上を連続的に動きながら，その $\mathfrak{F}$ 上への射影点が曲線 γ をたどるようにするとき，この変化を追ってゆくと，終点に着く以前に，$\mathfrak{F}$ の点 $\mathfrak{p}(\Lambda_0)$ の真上で被覆面の境界(Grenze)に出会う．

それゆえ，$\bar{\mathfrak{F}}$ 上の点 $\bar{\mathfrak{p}}_0$ がどんな点であっても，$\bar{\mathfrak{p}}_0$ の射影点 $\mathfrak{p}_0$ から出発する曲線 γ がどんな曲線であっても，つねに第一の場合だけが起こるならば，われわれはこの被覆面を**無境界**(unbegrenzt)であると呼ぶことにしよう．$\mathfrak{F}$ の各点の真上に，非分岐無境界な被覆面 $\bar{\mathfrak{F}}$ の点がただ一つだけあるとき，$\bar{\mathfrak{F}}$ は**単葉**(einblättrig)であって，本質的には $\mathfrak{F}$ と異ならない．面 $\mathfrak{F}$ に対して，非分岐無境界な被覆面が単葉なもの以外に存在しないとき，$\mathfrak{F}$ は**単連結**であるという[1]．

たとえば，ユークリッド数平面の円の内部 $\mathfrak{K}$ は単連結な面である．これを証明するために，$\mathfrak{K}$ の真上にある任意の非分岐無境界な被覆面 $\bar{\mathfrak{K}}$ を考えよう．$\mathfrak{K}$ の中心 $\mathfrak{o}$ の真上にある $\bar{\mathfrak{K}}$ の点の一つを $\bar{\mathfrak{o}}$ とする．$\mathfrak{o}$ から出発する $\mathfrak{K}$ 内の真っすぐな線分 $\mathfrak{op}$ の一つ一つに対して，$\bar{\mathfrak{o}}$ から始まり（そしてたとえば $\bar{\mathfrak{p}}$ で終わり），しかも上記の線分を射影とするような $\bar{\mathfrak{K}}$ 上の曲線を探し出すことによって，われわれは $\mathfrak{K}$ の各点 $\mathfrak{p}$ に対して，その真上にある $\bar{\mathfrak{K}}$ の点 $\bar{\mathfrak{p}}$ を一つずつ定めることができる．この対応 $\mathfrak{p} \to \bar{\mathfrak{p}}$ が両側から領域連続であることを示すことができれば，それによって $\mathfrak{K}$ の単連結性は証明されてしまう；なぜならこのときには，$\bar{\mathfrak{o}}$ から出発する $\bar{\mathfrak{K}}$ 上の曲線で，その射影線が $\mathfrak{o}$ から $\mathfrak{p}$ に至るものは，すべて同じ点 $\bar{\mathfrak{p}}$ で終わらなければならず，$\bar{\mathfrak{K}}$ は単葉となるからである．

ところで上記の証明をもたらすためには，つぎのようにする：$\mathfrak{K}$ における射影が真っすぐな線分 $\sigma = \mathfrak{op}$ となるような $\bar{\mathfrak{K}}$ 上の曲線を描きながら，$\bar{\mathfrak{o}}$ から出発して $\bar{\mathfrak{p}}$ に至る動点を $\bar{\mathfrak{q}}$ とし，各瞬間における $\bar{\mathfrak{q}}$ の射影点を $\mathfrak{q}$ とする．各点 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0$ にこの点を中心とする円 $k\mathfrak{q}_0$ を対応させ，しかも $\bar{\mathfrak{K}}$ 上には $\bar{\mathfrak{q}}_0$ を含む領域 $\bar{\mathfrak{G}}$ が存在して，これが対応《$\bar{\mathfrak{K}}$ 上の点 $\to \mathfrak{K}$ 内の射影点》によって $k\mathfrak{q}_0$ の上

1) この定義の仕方は，単連結な面の性質のうち，関数論への応用にあたって決定的なものを特にとり出している．

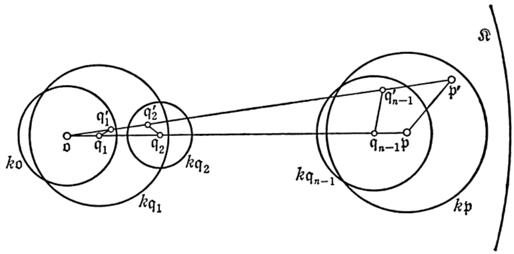


図 12. 円形の面が単連結であること.

へ両側から一意領域連続に写像されるようにすることができる. $k\mathfrak{q}_0$ によって σ から切り取られる線分 $\sigma\mathfrak{q}_0$ を射影とするような上記の曲線の部分弧を $\bar{\mathfrak{q}}$ が動く限り, $\bar{\mathfrak{q}}$ はこの領域 $\bar{\mathfrak{G}}$ のなかにある. 無限小解析の基本事項の一つであるいわゆるハイネ-ボレルの定理[1]により, われわれは線分 σ 上に有限個の点(図12を参照)

$$\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{o},\quad \mathfrak{q}_1,\quad \mathfrak{q}_2,\quad \cdots,\quad \mathfrak{q}_{n-1},\quad \mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}$$

を(この順序に)選んで, 対応する区間 $\sigma\mathfrak{o}, \sigma\mathfrak{q}_1, \sigma\mathfrak{q}_2, \cdots, \sigma\mathfrak{p}$ が線分 $\mathfrak{op}$ をすっかり覆い, しかも $\mathfrak{q}_{h+1}$ がつねに円 $k\mathfrak{q}_h$ の内部にある $[h=0, 1, \cdots, n-1]$ ようにすることができる. つぎに $\sigma'=\mathfrak{op}'$ は $\mathfrak{o}$ から出発する一つの真っすぐな線分であるとし, その終点 $\mathfrak{p}'$ が $k\mathfrak{p}$ のなかにあるばかりでなく, この線分は $\mathfrak{op}$ の十分近くを通って, つぎのような点を含むものとする: 同時に $k\mathfrak{o}$ および $k\mathfrak{q}_1$ の内部にある点 $\mathfrak{q}_1'$, 同時に $k\mathfrak{q}_1$ および $k\mathfrak{q}_2$ の内部にある点 $\mathfrak{q}_2'$, 以下同様にして最後には, 同時に $k\mathfrak{q}_{n-2}$, $k\mathfrak{q}_{n-1}$ の内部に属する点 $\mathfrak{q}_{n-1}'$. 真っすぐな線分 $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_2'$, $\cdots$, $\mathfrak{q}_{n-1}\mathfrak{q}_{n-1}'$, $\mathfrak{pp}'$ を引こう. $\bar{\mathfrak{o}}$ から出発する $\bar{\mathfrak{R}}$ 上の曲線で, その射影が三角形 $\mathfrak{oq}_1\mathfrak{q}_1'\mathfrak{o}$ となるものは閉じている; この三角形がすっかり $k\mathfrak{o}$ のなかにあるからである. $\bar{\mathfrak{q}}_1$ から出発する曲線で, その射影が四辺形 $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_2'\mathfrak{q}_1'\mathfrak{q}_1$ となるものは閉じる; この四辺形がすっかり $k\mathfrak{q}_1$ のなかにあるからである. これら二つの事実から出て来る結果として, $\bar{\mathfrak{o}}$ から出発する曲線で, その射影が三角形 $\mathfrak{oq}_2\mathfrak{q}_2'\mathfrak{o}$ を描くものは閉じる. 同じようにしてさきへ進めば, $\bar{\mathfrak{o}}$ で始まる曲線で, その

1) たとえば Lebesgue, Leçon sur l'intégration, Paris 1904, 104–105 ページを参照.

射影が三角形 $\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{o}$ となるものは閉じるという結果に到達する；それゆえ $\bar{\mathfrak{p}}$ から出発する曲線で，その射影が線分 $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ になるものと，$\bar{\mathfrak{o}}$ から出発する線で，その射影点が線分 $\sigma'=\mathfrak{o}\mathfrak{p}'$ を描くものとは，同じ点 $\bar{\mathfrak{p}}'$ に終わる．これによって求める証明が得られたことになる．

このことからつぎの結果が出る：$\bar{\mathfrak{F}}$ は任意の基礎面 $\mathfrak{F}$ の真上にある非分岐無境界な被覆面，$\mathfrak{p}_0$ は近傍 $\mathfrak{U}$ をもつ $\mathfrak{F}$ 上の点，$\bar{\mathfrak{p}}_0$ は $\mathfrak{p}_0$ の真上にある $\bar{\mathfrak{F}}$ の一点であるとすれば，対応《$\bar{\mathfrak{F}}$ の点→$\mathfrak{F}$ 上の射影点》によって一対一に，両側から領域連続に $\mathfrak{U}$ の上へ写像されて来るような，$\bar{\mathfrak{p}}_0$ を含む $\bar{\mathfrak{F}}$ 上の領域 $\bar{\mathfrak{U}}$ がただ一つ存在する．全く同様にしてわかることであるが，$\mathfrak{F}$ に一つの三角形分割 ζ が定められ，$\triangle$ は点 $\mathfrak{p}_0$ を含む基本三角形であるとき，$\triangle$ の真上には $\bar{\mathfrak{p}}_0$ を含む一つの点集合 $\overline{\triangle}$ があって，これはさきに述べた対応によって $\triangle$ の上へ両側から一意連続に写像され，$\overline{\triangle}$ の各点に対して，$\triangle$ におけるその射影点に対応する座標比と同じ座標比 $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ を割り当てることにより，$\overline{\triangle}$ は $\bar{\mathfrak{F}}$ 上の三角形に変わる．このことから出て来る結果として：ζ の各基本三角形に対し，その真上にある $\bar{\mathfrak{F}}$ の三角形 $\overline{\triangle}$ を全部つくれば，$\bar{\mathfrak{F}}$ の三角形分割 $\bar{\zeta}$ を得る．

さらにつぎの結論が得られる：$\mathfrak{F}$ の上で同じ二点 $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1$ を結ぶ二つの曲線 γ'，γ'' に対して，$\mathfrak{p}_0$ の真上にある点 $\bar{\mathfrak{p}}_0$ から出発する $\bar{\mathfrak{F}}$ 上の曲線のうち，γ', γ'' を射影線とする二つの曲線を調べれば，γ', γ'' が互いに十分近くを通る限り，両者は $\mathfrak{p}_1$ の真上で同じ終点 $\bar{\mathfrak{p}}_1$ に到達する．最後の条件をもっと正確に定式化すればつぎのようになる：すなわち，γ' と γ'' をそれぞれ順に有限個の部分弧

$$\gamma_1', \gamma_2', \cdots, \gamma_n'; \quad \text{および} \quad \gamma_1'', \gamma_2'', \cdots, \gamma_n''$$

に分割し，γ_h' と γ_h'' とがつねに $\mathfrak{F}$ 上の適当な点 $\mathfrak{q}_h$ の或る近傍にすっかり含まれるようにすることができる．特に γ' が与えられているときには，（$\mathfrak{F}$ の三角形分割を定めたのち）γ'' として $\mathfrak{F}$ 上の折れ線をとり，すべての非分岐無境界な被覆面 $\bar{\mathfrak{F}}$ の上で，γ' と γ'' の真上にある二曲線がいずれも $\bar{\mathfrak{F}}$ 上の同じ始点から出発する限り，同じ終点に到達するようにできる．

$\mathfrak{F}$ の真上にある非分岐無境界な被覆面 $\bar{\mathfrak{F}}$ において，$\mathfrak{F}$ のなかに同じ射影線をもつ $\bar{\mathfrak{F}}$ 上の二曲線のうち，一方は閉じ，他方は閉じないということが決して起こらないならば，$\bar{\mathfrak{F}}$ を**正規**(regulär)[1]と呼ぶ習慣である．$\bar{\mathfrak{F}}$ が正規であ

1)（訳注）群論との関係から，現在では normal という言葉を使うようである．

って，$\bar{\mathfrak{p}}_0, \bar{\mathfrak{p}}_0'$ は $\bar{\mathfrak{F}}$ 上の“**重なり合う**”(すなわち，$\mathfrak{F}$ のなかに同じ射影点をもつ)任意の二点であるとき，$\bar{\mathfrak{F}}$ からそれ自身の上への，一対一で両側から領域連続な写像で，各点 $\bar{\mathfrak{p}}$ をそれに重なる点に移し，特に $\bar{\mathfrak{p}}_0$ を $\bar{\mathfrak{p}}_0'$ に移すものがただ一つ存在する．このような“**$\bar{\mathfrak{F}}$ からそれ自身への被覆変換**”の全体は一つの群 Γ をつくるが，これを抽象的な群とみなすとき，$\bar{\mathfrak{F}}$ の $\mathfrak{F}$ に対する関係は，それが位置解析的性格をもつものである限り，Γ において純粋な，そして完全な表現に到達する．被覆変換

$$T : \bar{\mathfrak{p}} \to \bar{\mathfrak{p}}'$$

の存在を証明するために，$\bar{\mathfrak{F}}$ 上で一つの曲線 $\bar{\gamma}$ により $\bar{\mathfrak{p}}_0$ を $\bar{\mathfrak{p}}$ と結び，また $\bar{\mathfrak{p}}_0'$ から出発して，$\mathfrak{F}$ 上の射影線が $\bar{\gamma}$ の射影線と一致するように，$\bar{\mathfrak{F}}$ 上の曲線 $\bar{\gamma}'$ を描こう．$\bar{\gamma}'$ の終点 $\bar{\mathfrak{p}}'$ を $\bar{\mathfrak{p}}$ に対応させることにする．$\bar{\mathfrak{F}}$ が正規であるという仮定によって，$\bar{\mathfrak{p}}_0$ を $\bar{\mathfrak{p}}$ と結ぶ曲線 $\bar{\gamma}$ の選び方に関係なく $\bar{\mathfrak{p}}'$ は定まる．実際，$\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1$ がこのような二つの曲線であるとすれば，$\bar{\gamma}_1$ を逆の向きにたどる曲線を $\bar{\gamma}$ に結びつけてできる曲線 $\bar{\gamma}-\bar{\gamma}_1$ は閉じている．それゆえ $\bar{\mathfrak{p}}_0'$ から出発して，$\bar{\gamma}-\bar{\gamma}_1$ と同じ射影線をもつ曲線 $(\bar{\gamma}-\bar{\gamma}_1)'$ もまた閉じている；すなわち $\bar{\gamma}'$ と $\bar{\gamma}_1'$ は同じ終点 $\bar{\mathfrak{p}}'$ に到達する．——上に述べた方法による被覆面 $\bar{\mathfrak{F}}$ の抽象群 Γ による表現が，正規被覆面に対してだけ可能であることはいうまでもない．

与えられた面 $\mathfrak{F}$ に対する非分岐無境界なすべての被覆面のうちで，“最強の”ものが一つ存在する[1]；それはつぎの命題によって特徴づけられる：その上の曲線 $\tilde{\gamma}$ が閉じるのは，$\mathfrak{F}$ の任意の非分岐無境界な被覆面の上にあって，$\mathfrak{F}$ 上に $\tilde{\gamma}$ と同じ射影曲線をもつような曲線がすべて閉じるときに限る．この“**普遍被覆面**(universelle Überlagerungsfläche)” $\tilde{\mathfrak{F}}$ は上記の性質により正規であり，その被覆変換の群を抽象群とみなせば，それは基礎面 $\mathfrak{F}$ の位置解析的な不変構造である．さらに $\tilde{\mathfrak{F}}$ は単連結である．実際，$\tilde{\mathfrak{F}}^*$ が $\tilde{\mathfrak{F}}$ の真上の非分岐無境界な被覆面であって，その被覆が単葉より多いとすれば，$\tilde{\mathfrak{F}}^*$ 上に閉じていない一つの線をひき，その $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の射影曲線は閉じるようにすることができる．しかし $\tilde{\mathfrak{F}}^*$ はまた $\mathfrak{F}$ の真上の非分岐無境界な被覆面でもあるから，このような可能性はただちに，$\tilde{\mathfrak{F}}$ を特徴づけた性質と矛盾する．

普遍被覆面を明確に定めるには，たとえばつぎのようにすればよい：$\mathfrak{F}$ の点

1) Poincaré, Bulletin de la société mathématique de France, **11**(1883), 113–114 ページ.

$\mathfrak{p}_0$ を固定し，ここから出発する曲線 γ の一つ一つは "$\tilde{\mathfrak{F}}$ の点" を一つずつ定めるとし，これについてわれわれは，この点が γ の終点の真上にあるということにしよう；このような二つの曲線 γ, γ' が $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の同じ点を定めるのは，$\mathfrak{F}$ の真上の非分岐無境界な被覆面のいずれにおいても，同じ点から出発してそれぞれ γ, γ' を射影線とする二つの曲線がつねに同じ点に終るとき，またそのときだけであるとする．——γ_0 は $\mathfrak{p}_0$ から $\mathfrak{p}$ に至る $\mathfrak{F}$ 上の曲線であり，これが $\tilde{\mathfrak{F}}$ の点 $\tilde{\mathfrak{p}}$ を定め，$\mathfrak{U}$ は $\mathfrak{F}$ における $\mathfrak{p}$ の近傍であるとしよう．私が $\mathfrak{p}$ から出発して $\mathfrak{U}$ のなかを通るような，ありとあらゆる曲線 γ をとって γ_0 につけ加えるとき，こうしてできるすべての合成曲線 $\gamma_0+\gamma$ によって定められる $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の点は，$\tilde{\mathfrak{p}}$ の一つの "近傍" $\tilde{\mathfrak{U}}$ を構成するといおう．$\mathfrak{U}$ は単連結であるから，$\mathfrak{U}$ の各点の真上には $\tilde{\mathfrak{U}}$ の点がただ一つあり，その結果われわれの "近傍" という概念は，これについて定められた要請(§4)を満たす．$\mathfrak{F}$ の三角形分割はいずれもただちに $\tilde{\mathfrak{F}}$ の上に移され，これによってわれわれは $\tilde{\mathfrak{F}}$ を "面" と呼ぶ権利を得る[1]．

単連結な面はすべて単葉型である．なぜなら，三角形分割の定められた面 $\mathfrak{F}_\zeta$ の上に，辺から成る一つの多角形 π があって，これが面を分けないとすれば，いつでもつぎのようにして，$\mathfrak{F}$ の真上に非分岐無境界な二葉の被覆面を構成することができるからである[2]：ζ の各基本三角形 $\triangle$ に二つの "$\triangle$ の真上にある三角形" $\triangle_1, \triangle_2$ を対応させる．$\triangle', \triangle''$ が多角形 π に属さない辺で隣接する ζ の二つの三角形であるとき，対応する辺に沿って $\triangle_1'$ と $\triangle_1''$ を，そして $\triangle_2'$ と $\triangle_2''$ を互いにつなぐことにする．しかし $\triangle', \triangle''$ の共通辺が多角形 π に属するときには，対応する辺に沿って $\triangle_1'$ を $\triangle_2''$ に，$\triangle_2'$ を $\triangle_1''$ に縫いつける．——ユークリッド平面のなかの直線による多角形がこの平面を分けるということは，この定理の特殊な場合である；ユークリッド平面が単連結であることは，円の内部の単連結性と全く同じ方法で確かめられるからである．

有限個の三角形から成る領域がどのような場合に単連結であるかを決定する

1) $\mathfrak{F}$ が閉じており，したがって有限個の基本三角形に分解されているときには，$\tilde{\mathfrak{F}}$ の構成にあたり，$\mathfrak{F}$ 上の三角形から成る有限個の閉じた鎖について，これが $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上でもまた閉じているかどうかを確定することだけが問題であり，これはもちろん一定の有限な手続きによって決定されるはずである．Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischen Kurven II, Crelles Journal, 139 (1911), 271–276 ページによる $\tilde{\mathfrak{F}}$ の発生的な構成法を参照．

2) 以下における被覆面のつくり方は，§5，例 9 において一般的に述べた方法に従って得られる．

ことは重要である．それゆえ，三角形分割された面 $\mathfrak{F}_\zeta$ の上に一つの領域 $\mathfrak{P}$ が与えられ，これは ζ の基本三角形 $\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_n$ の点だけから成るが，またこれらの三角形の内部の点をすべて本当に含んでいるとする；これらの三角形の辺は，（場合により端点を除いて）すっかり $\mathfrak{P}$ に含まれる［**内辺**］か，または $\mathfrak{P}$ の点を一つももたない［**境界辺**］か，どちらか一方であるとする；一つの頂点から内辺だけが出てゆくとき，この頂点はつねに $\mathfrak{P}$ の内部にあるとする．このような領域 $\mathfrak{P}$ を**多面体**，さらに詳しくは，これが少なくとも一つの境界辺をもつとき**開いた**多面体，境界辺が全くないとき**閉じた**多面体と呼ぼう．$\mathfrak{P}$ が閉じた多面体となりうるのは，$\mathfrak{F}$ が閉じた面であり，$\mathfrak{P}$ が $\mathfrak{F}$ と一致するときに限る．辺から成る単純な折れ線が，$\mathfrak{P}$ の内部にない両端点を除けば，すっかり $\mathfrak{P}$ に含まれるとき，この折れ線は**横断線**と呼ばれる．$\mathfrak{P}$ が開いているとき，これがただ一つの三角形 $\triangle_1$ から成るのでなければ，$\mathfrak{P}$ のなかに横断線が存在する（たとえば，少なくとも一つの辺が境界辺であるような三角形 $\triangle_i$ の，一つまたは二つの辺はこのような線をつくる）．§8 でなされた考察が示すように，一つの横断線は $\mathfrak{P}$ を全く分けないか，または二つの領域に分け，あとの場合はこれらの領域もまた開いた多面体である．開いた多面体 $\mathfrak{P}$ が単連結であるとき，どの横断線も $\mathfrak{P}$ を分ける；このことは，さきに単連結性から，すべての閉じた多角形が分けるという性質を導き出したのと，全く同じようにしてわかる．ここではまた逆も成り立つ：どの横断線によっても分けられる開いた多面体は単連結である．（辺から成るどの多角形によっても分けられる閉じた多面体は単連結である．）

1. $\mathfrak{P}$ は開いた多面体であって，この定理の仮定を満たすものとし，また横断線 σ によって $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ に分けられているとする．このとき，二つの多面体 $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ もまたそれぞれこの仮定を満たす．実際，$\mathfrak{P}_1$ の任意の横断線 σ_1 は，そのま

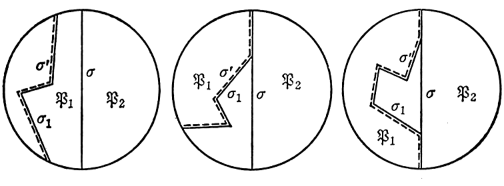


図 **13.** 横　断　線.

まで $\mathfrak{P}$ の横断線 σ' になっているか，または σ に含まれる一つあるいは二つの折れ線をつけ加えることによって，そのような線に変えられる(図13)．σ_1 に属する一つの辺に沿って隣り合う二つの三角形に注目し，これらの三角形の内部にそれぞれ点 $\mathfrak{p}^*, \mathfrak{p}^{**}$ をとる．$\mathfrak{P}$ は σ' によって分けられるから，$\mathfrak{p}^*$ と $\mathfrak{p}^{**}$ を $\mathfrak{P}$ のなかで，σ' を越えずに結ぶことはできない(51ページ)．しかし $\mathfrak{p}^*, \mathfrak{p}^{**}$ は両方とも $\mathfrak{P}_1$ にあるから，いま述べたことにより，$\mathfrak{P}_1$ の内部で σ_1 を越えずに結ばれえない；すなわち $\mathfrak{P}_1$ は σ_1 によって分けられる．

2. $\mathfrak{P}$ の真上の(非分岐無境界な)被覆面 $\bar{\mathfrak{P}}$ を考えよう．$\triangle_1, \triangle_2$ は σ の一辺 σ^0 に沿って隣り合う三角形であって，$\triangle_1$ は $\mathfrak{P}_1$ に，$\triangle_2$ は $\mathfrak{P}_2$ に属するとする；$\overline{\triangle}_1, \overline{\triangle}_2$ はそれぞれ $\triangle_1, \triangle_2$ の真上にある $\bar{\mathfrak{P}}$ 上の三角形で，共通辺をもつものとする．いま証明中の定理が，$\mathfrak{P}$ より少数の三角形から成る多面体に対してはすでに証明されていると仮定しよう；そうすれば $\mathfrak{P}_1$ と $\mathfrak{P}_2$ は単連結であるといえる．その結果われわれは $\mathfrak{P}$ の各三角形 $\triangle$ に対して，その真上にある $\bar{\mathfrak{P}}$ の三角形 $\overline{\triangle}$ を一つずつ対応させ，しかも $\overline{\triangle}_1$ が三角形 $\triangle_1$ に，$\overline{\triangle}_2$ が三角形 $\triangle_2$ に対応して現われ，そして $\mathfrak{P}_1$ あるいは $\mathfrak{P}_2$ の内辺を共通辺としてもつ任意の二つの三角形 $\triangle$ には，いつでも同じように一辺を共有する二つの三角形 $\overline{\triangle}$ が対応するようにできる．$\mathfrak{p}_0$ が σ^0 の一つの端点で，横断線 σ の端点ではないとすれば，$\mathfrak{p}_0$ のまわりに集まっている $\mathfrak{F}_\zeta$ の基本三角形から成る星 $\mathfrak{S}$($\mathfrak{S}$ はすっかり $\mathfrak{P}$ に含まれる)の真上には，$\overline{\triangle}_1, \overline{\triangle}_2$ のほか $\mathfrak{S}$ の各三角形 $\triangle$ の真上にある三角形 $\overline{\triangle}$ を($\bar{\mathfrak{P}}$ の非分岐性により)ただ一つずつ含むような，$\bar{\mathfrak{P}}$ 上の三角形のサイクル $\bar{\mathfrak{S}}$ があり，このとき現われる $\overline{\triangle}$ は，ちょうどさきの対応によって $\triangle$

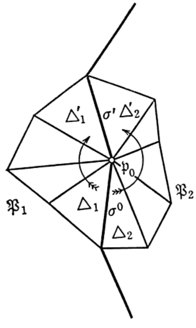


図 14.

に割り当てられた三角形以外のものではありえない(図14を見よ)．σ' は頂点 $\mathfrak{p}_0$ において σ^0 のつぎに来る σ の辺であり，$\triangle_1'$, $\triangle_2'$ はそれぞれ $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ のなかの三角形で共通辺 σ' をもつものとすれば，このことから，さきの対応によって得られた三角形 $\overline{\triangle}_1'$, $\overline{\triangle}_2'$ もまた同じように一辺を共有することが出て来る．このように σ^0 から横断線 σ に沿って二つの方向に進みながら，辺ごとに議論を繰り返せば，三角形 $\overline{\triangle}$ は横断線 σ の真上においても，切れ目なく互いに結びついているという理解に到達する．これによって $\overline{\mathfrak{P}}$ が単葉であること，したがって $\mathfrak{P}$ が単連結であることの証明は終った．なぜなら，ただ一つの三角形から成る多面体に対して，われわれの定理が成り立つことについては，疑問の余地がないからである．

複素関数論に対する被覆面の意義は，すでにつぎの事実からわかる：すなわち一つのリーマン面 $\mathfrak{F}$ に対する非分岐無境界な各被覆面 $\overline{\mathfrak{F}}$ は，ただちにそれ自身一つのリーマン面である．なぜなら，$\mathfrak{F}$ の一点 $\mathfrak{p}$ の真上にある被覆面のすべての点に，$\mathfrak{p}$ に対応させる関数値と同じ関数値を対応させることによって，$\mathfrak{F}$ の点 $\mathfrak{p}_0$ に属する局所一意化変数 $t(\mathfrak{p})$ の一つ一つから，$\mathfrak{p}_0$ の真上にある $\overline{\mathfrak{F}}$ の各点に対して一定の局所一意化変数 t が得られ，また真性特異点をもたない $\mathfrak{F}$ 上の各関数からは，同じ性格をもつ $\overline{\mathfrak{F}}$ 上の関数が得られるからである．ところで任意の非分岐無境界な被覆面 $\overline{\mathfrak{F}}$ の上の各関数は，普遍被覆面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の一意関数として再現されるから，この被覆面の考察は，或る程度までこれほど強くない他のすべての被覆面の考察に代るだけの価値がある．$\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の関数のうちで，基礎面 $\mathfrak{F}$ 上の関数 f を特徴づける性質は，それが $\tilde{\mathfrak{F}}$ の被覆変換群に関して不変に振舞うことである；すなわち，対応 $T:\tilde{\mathfrak{p}}\to\tilde{\mathfrak{p}}T$ がこれらの被覆変換の任意の一つであるとき，それは恒等式

$$f(\tilde{\mathfrak{p}})=f(\tilde{\mathfrak{p}}T)$$

を満たす．

関数論において一つの面の単連結性を利用し尽くすには，つぎの一意性の定理(Monodromiesatz)を基本にとればよい：

$\mathfrak{F}$ が単連結な面であり，

$z=a_{-m}t^{-m}+\cdots+a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots$ [t は $\mathfrak{p}_0$ に属する局所一意化変数]

は $\mathfrak{F}$ の点 $\mathfrak{p}_0$ に中心をもつ関数要素で，$\mathfrak{F}$ 上の任意の道に沿って z を解析接続

するとき，通常の極以外の臨界点に決して出会わないならば，この接続により $\mathfrak{F}$ 上で一意の，極を除いて正則-解析的な関数が得られる.

証明：普遍被覆面を定義したのと同じようにして，つぎの性質をもつ $\mathfrak{F}$ の非分岐無境界な被覆面を一つ定める：すなわち，$\mathfrak{F}$ 上の射影線が $\mathfrak{p}_0$ から出て $\mathfrak{p}_0$ に戻るような，この被覆面上の曲線は，この射影線に沿う関数要素 z の接続が始めの要素に戻るとき，またそのときだけ閉じるようにする. $\mathfrak{F}$ が単連結であるという仮定により，この被覆面は単葉でなければならない. これによってすでに一意性の定理の証明はなされた.

一意性の定理の特殊な場合の一つがコーシーの積分定理である. これを一般的に定式化することができるためには，リーマン面上の“微分”について話さなければならない. 一つの“関数”は，その定義域の各点において決まった値をもつことによって特徴づけられるが，一点 $\mathfrak{p}$ における**微分** dz には，それ自身に対して決まった値が与えられるのではなく，$\mathfrak{p}$ に属する一つ一つの局所一意化変数 t の微分 dt に対する比としてだけ，一つの決まった値 $(dz)_t{}^{\mathfrak{p}}$ が与えられるのである；t, τ が同じ点 $\mathfrak{p}$ に属する二つの局所一意化変数であるとすれば，このときつねに

$$(dz)_t{}^{\mathfrak{p}} = (dz)_\tau{}^{\mathfrak{p}}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{t=0}$$

でなければならない. 領域 $\mathfrak{G}$ において正則な関数 z は微分 dz をもち，これについては，$\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{G}$ の任意の一点を意味し，t が $\mathfrak{p}$ に属する任意の局所一意化変数を意味するとき，

$$(dz)_t{}^{\mathfrak{p}} = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0}$$

である. また調和関数 u からも一つの微分 dw がつくり出される――それは公式

$$(dw)_t{}^{\mathfrak{p}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{t=0} \qquad [t = x+iy]$$

による. 微分 dz に関数 f を掛けることによって，新しい微分 dZ が生ずる：

$$(dZ)_t{}^{\mathfrak{p}} = f(\mathfrak{p})\cdot(dz)_t{}^{\mathfrak{p}}.$$

一点 $\mathfrak{p}$ において，$\mathfrak{p}$ に属する一つの局所一意化変数 t に対し $(dz)_t{}^{\mathfrak{p}}=0$ ならば，

このことは $\mathfrak{p}$ に属するすべての局所一意化変数に対しても成り立つ；このとき $\mathfrak{p}$ は dz の**零点**である．dZ, dz が同じ領域 $\mathfrak{G}$ で定義された二つの微分であり，dz がどこにも零点をもたないとすれば，$\frac{dZ}{dz}=f$ は $\mathfrak{G}$ における関数である；すなわち

$$\frac{(dZ)_t{}^{\mathfrak{p}}}{(dz)_t{}^{\mathfrak{p}}}=f(\mathfrak{p})$$

は局所一意化変数の選び方に無関係である．

点 $\mathfrak{p}_0$ の（局所一意化変数 t をもつ）一つの近傍があり，そこで dz と dt が存在し，$dt\neq 0$ で $\frac{dz}{dt}$ が正則-解析的であるならば，dz は点 $\mathfrak{p}_0$ において**正則-解析的**であるという．$\frac{dz}{dt}$ が $t=0$ に対して m 位の零点をもつとき，われわれはまた微分 dz についても，これが $\mathfrak{p}_0$ において $\boldsymbol{m}$ **位の零点**をもつ（あるいは m 位である）という；$\frac{dz}{dt}$ が n 位の極をもつ（dz はこのとき $\mathfrak{p}_0$ の近傍において，この点自身を除けば定義されている）ならば，dz は $\mathfrak{p}_0$ において $\boldsymbol{n}$ **位の極**をもつ（あるいは $-n$ 位である）という．これらの位数は局所一意化変数 t の選び方に無関係である．同じことは微分 dz の点 $\mathfrak{p}_0$ における**留数**[1]，すなわち展開

$$\frac{dz}{dt}=A_{-n}t^{-n}+\cdots+A_{-1}t^{-1}+A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots$$

の係数 A_{-1} についても成り立つ．極を除いて正則な関数の微分はそれ自身，極を除けば，正則-解析的であり，0 と異なる留数をどこにももたない．この定理の逆は，それが成り立つ範囲で，一般的な形式に述べられたコーシーの積分定理の内容を形づくる．

dz は単連結な領域 $\mathfrak{G}$ において，極を除いて正則な微分であり，どこにも留数 $\neq 0$ をもたないとすれば，極を除いて正則な一意関数 z が存在して，その微分は与えられた dz と $\mathfrak{G}$ 全体で一致する．

証明：$\mathfrak{p}_0$ は $\mathfrak{G}$ 内の一点であって，そこでは dz が正則な状態にあり，$\mathfrak{p}_0$ に属する一つの局所一意化変数 t との関係においては，十分小さな t に対して展開

1） 留数とは微分に属するもので，関数に属するものでないことをあくまでも心にとめておく必要がある．

$$\frac{dz}{dt} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots$$

が成り立つものとする．このとき，関数要素

$$z = A_0 t + A_1 \frac{t^2}{2} + A_2 \frac{t^3}{3} + \cdots$$

をつくろう．この要素は，$\mathfrak{p}_0$ から出発して $\mathfrak{G}$ 内を通るどの曲線 γ に沿っても解析接続を許し，その際極以外の臨界点に出会うことは決してない(この解析接続の助けを借りてわれわれは積分 $\int_\gamma dz$ を定義する)；こうすれば一意性の定理により，求める性質をもった $\mathfrak{G}$ 内の一意関数 z が得られる．

§10. 面の単側性と双側性．留数定理．

ユークリッド平面のなかに，回転の向きの定められた一つの閉曲線 $\mathfrak{C}$ のほか，$\mathfrak{C}$ 上にない一点 O と，O を通る半直線の束における(簡単には：O における)一定の回転の向き $\mathfrak{A}$ が与えられているとする．動点 P が曲線 $\mathfrak{C}$ をあらかじめ与えられた向きに一周するあいだ，O を通る一つの固定半直線に対して，線分 OP がつくる角 φ の連続的な変化を追ってゆけば，差

《一周の終わりにおける φ の値 − 始めにおける φ の値》

は 2π の整数倍 $2n\pi$ となるであろう；整数 n を O の $\mathfrak{C}$ に関する**位数**といい，記号では

$$n = \underset{\mathfrak{C}}{\mathrm{ord}}(O)$$

と書く．この数 n は点 O および向きの定められた曲線 $\mathfrak{C}$ のほか，O における回転の向き $\mathfrak{A}$ にも依存する；これを逆の向きのものに置き換えると，n はその符号を変える．

任意の面の上で回転の向きを確定することができるという事実は，つぎの基本定理に基づく：

<u>ユークリッド平面の領域 $\mathfrak{G}$ が同じような領域 $\mathfrak{G}'$ の上へ一対一に，両側から領域連続に写像され，$\mathfrak{G}$ の点 O には点 O' が対応するとしよう；さらに O において一定の回転の向き $\mathfrak{A}$ が与えられるならば，O' における一つの回転の向き $\mathfrak{A}'$ を確定して，O を通らない $\mathfrak{G}$ 内の各閉曲線に関する点 O の位数とその</u>

像曲線に関する O' の位数がつねに一致するようにすることができる.

これを証明するために，O を中心とする $\mathfrak{G}$ 内の定円 $\mathfrak{k}$(x, y はデカルト座標を意味する)：

$$x = a\cos 2\pi\lambda, \qquad y = a\sin 2\pi\lambda \qquad [0 \leqq \lambda \leqq 1]$$

を用いる；$\mathfrak{k}$ に関して O は位数 1 をもつ. われわれは O' において考えられる二つの回転の向きのうち，さしあたって一つを任意に決めておき，$\mathfrak{k}$ の像曲線 $\mathfrak{k}'$ に関する O' の位数を n_0 としよう. 証明はつぎの二つの部分に分かれる：

1. $\mathfrak{C}$ は O を通らない $\mathfrak{G}$ 内の閉曲線であって，$n = \underset{\mathfrak{C}}{\mathrm{ord}}(O)$ であるとすれば，

$$\underset{\mathfrak{C}'}{\mathrm{ord}}(O') = n \cdot n_0.$$ [1)]

2. n_0 は $= +1$ または -1.

1 の証明：

$$x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda) \qquad [0 \leqq \lambda \leqq 1]$$

が曲線 $\mathfrak{C}$ であるとする；これを部分弧

$$0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1, \qquad \lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2, \qquad \cdots, \qquad \lambda_{r-1} \leqq \lambda \leqq 1$$

に分割し，これらの部分弧のいずれにおいても偏角 φ の値の変動が $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい範囲にとどまるようにしよう. $P_0, P_1, \cdots, P_{r-1}$ は値 $0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{r-1}$ に対応する曲線上の点であるとする. それゆえ，P が h 番目の弧 $\mathfrak{C}_h : \lambda_{h-1} \leqq \lambda \leqq \lambda_h$ をたどるあいだに，O を通る一つの定半直線に対して OP がつくる角 $\varphi = \varphi(\lambda)$ の連続的な変化を追えば，差の絶対値が $\geqq \dfrac{\pi}{2}$ となるような φ の二つの値は決して現われない. 半直線 OP_{h-1}, OP_h が $\mathfrak{k}$ から切り取る円弧 $\mathfrak{k}_h : Q_{h-1}Q_h$ を $\mathfrak{C}_h$ に対応させ，パラメータ λ を使って $\mathfrak{k}_h$ に表現：$x = x_h(\lambda)$, $y = y_h(\lambda)$ を与え，

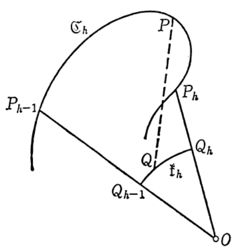


図 15.

1) (訳注) $\mathfrak{C}'$ はもちろん $\mathfrak{C}$ の像曲線である.

しかも λ が λ_{h-1} から λ_h まで単調に増加するとき，対応する点(xy)は Q_{h-1} から Q_h に向かってこの円弧の上を単調に動くようにする．$\mathfrak{C}_h$ 上の点 P を $\mathfrak{k}_h$ 上の点 Q に結ぶ線分は決して点 O を通らない；もしも通るとすれば半直線 OP, OQ が互いに角 π をつくることになるが，これは不可能である．

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 + \cdots + \mathfrak{k}_r$$

は一つの閉曲線で，円 $\mathfrak{k}$ を区分的には単調に，全体としては n 回まわる．したがって $\mathfrak{K}$ の像曲線 $\mathfrak{K}'$ も区分的には単調に，全体としては n 回 $\mathfrak{k}'$ をまわる；それゆえ O' は $\mathfrak{K}'$ に関して位数 $n\cdot n_0$ をもつ．

μ を $\geqq 0$ かつ $\leqq 1$ である数とするとき，等式

$$\begin{aligned} x &= \mu x(\lambda) + (1-\mu) x_h(\lambda) \\ y &= \mu y(\lambda) + (1-\mu) y_h(\lambda) \end{aligned} \qquad (\lambda_{h-1} \leqq \lambda \leqq \lambda_h) \qquad h = 1, 2, \cdots, r$$

は一つの閉曲線 $\mathfrak{C}_\mu$ を表わし，この曲線は O を通らないから，その像曲線 $\mathfrak{C}_\mu'$ は O' を通らない．それゆえ，n_μ' によって O' の $\mathfrak{C}_\mu'$ に関する位数を表わせば，n_μ' は μ とともに変わるが，$\mathfrak{C}_\mu'$ が μ に連続的に依存しているから，n_μ' は連続的に変化し，しかもつねに整数でなければならない；したがって $0 \leqq \mu \leqq 1$ において定数である．$\mu=1$ のとき $\mathfrak{C}_\mu = \mathfrak{C}$ で，$\mu=0$ のとき曲線 $\mathfrak{K}$ に一致するから，

$$\operatorname*{ord}_{\mathfrak{C}'}(O') = \operatorname*{ord}_{\mathfrak{K}'}(O') = n\cdot n_0$$

でなければならない．

2. の証明[1]．$\mathfrak{E}$ はユークリッド平面の閉集合，P は $\mathfrak{E}$ に属さない或る一点であるとき，$\mathfrak{E}$ と出会わない連続曲線によって P と結ばれるような点の全体を **$\mathfrak{E}$ によって定められる領域**という．$\mathfrak{E}$ によって定められる二つの領域は，全く同じであるか，または点を一つも共有しない．一つの領域の**境界**は，この領域そのものには属さず，領域の点の集積点になっているようなすべての点から構成される．$\mathfrak{E}$ によって定められる一つの領域 $\mathfrak{G}$ の境界は，$\mathfrak{E}$ の部分閉集合 $\mathfrak{E}^*$ である．このとき $\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{E}^*$ によって定められる領域の一つにもなっている．

1)　(第2版巻末の訂正と補注)　本文に与えられた 2. の証明は，つぎのもっと短いものに代えられる：1. で証明されたことを，$\mathfrak{G}'$ 内の像曲線として O' のまわりの円 $\mathfrak{c}'$ をもつような，$\mathfrak{G}$ 内の曲線 $\mathfrak{c}$ に適用すれば，等式

$$1 = n_1 \cdot n_0$$

が得られ，この n_1 は O の $\mathfrak{c}$ に関する位数を意味する；これからただちに $n_0 = \pm 1$ が出る．

このことから $\mathfrak{k}'$ に対してつぎのことが出て来る：閉曲線 $\mathfrak{k}'$ は平面のなかに二つの領域を定める；そのうちの一つ $\mathfrak{J}$ は，われわれが内部と呼ぶものであるが，$\mathfrak{k}$ の内部にある点の像点全体から成る；もう一つの $\mathfrak{A}$，すなわち“外部”は，この平面の遠く離れた点をすべて含む．“遠く離れた”点というのは，曲線 $\mathfrak{k}'$ をすっかり内部に含むような，O' のまわりの円を一つとるとき，この円の外部にある点を指すことにする．$\mathfrak{k}'$ の各点は $\mathfrak{J}$ の境界にも $\mathfrak{A}$ の境界にも属する．$\mathfrak{k}'$ の部分弧はただ一つの領域しか定めない．

この平面の各点において，$\mathfrak{k}'$ に関するこの点の位数を定めるために，同一の回転の向きを基礎におく．このとき一つの点をこの平面のなかで $\mathfrak{k}'$ に出会わないように連続的に動かせば，$\mathfrak{k}'$ に関するこの点の位数は連続的に変わるはずであるから，定数にとどまらなければならない．それゆえ，$\mathfrak{A}$ のすべての点に対して，また $\mathfrak{J}$ のすべての点に対して，それぞれ一定の位数が存在する；遠く離れた点は $\mathfrak{k}'$ に関して確かに位数 0 をもつから，$\mathfrak{A}$ に対する上記の値は $=0$ である．$\mathfrak{J}$ の点について，われわれはその位数が $=\pm 1$ であることをいおう．

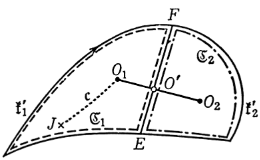


図 16. 曲線 $\mathfrak{k}'$ による領域の分割.

O' を通って一つの直線をひく．O' から両方向にこの直線をたどれば，それぞれの向きにおいて，はじめて $\mathfrak{k}'$ に出会う一点があるはずである．こうして得られる $\mathfrak{k}'$ の二点 E, F によって，この曲線は二つの部分弧に分割される．そのうちの一つ，$\mathfrak{k}_1'$ は真っすぐな線分 $\overrightarrow{FE}$ とともに一つの閉曲線 $\mathfrak{C}_1$ をつくり，他の一つ，$\mathfrak{k}_2'$ は線分 $\overrightarrow{EF}$ とともに第二の閉曲線 $\mathfrak{C}_2$ をつくる．線分 EF に直交し，すっかり $\mathfrak{J}$ のなかに含まれる小さな線分 O_1O_2 により，点 O' において，EF を横切ろう．点 P が線分 O_1O_2 を単調にたどりながら，O' を通過するとき，P の $\mathfrak{C}_1$ に関する位数は明らかに ± 1 だけ飛躍する[1)]：すなわち

1) 実際，点 P から線分 $\overrightarrow{FE}$ を見る角は，P が O_1 から O' へ，あるいは O_2 から O' へ近づくにしたがって，それぞれ $+\pi$ あるいは $-\pi$ に収束する；ところが，P から出る動径のもう一つの端点が曲線 $\mathfrak{k}_1'$ を描くあいだにこの動径が受ける角変化の総量は，P に連続的に依存し，$P=O'$ の位置においても連続である．

$$\underset{\mathfrak{C}_1}{\mathrm{ord}}(O_1)-\underset{\mathfrak{C}_1}{\mathrm{ord}}(O_2) = \pm 1.$$

この平面を分けない $\mathfrak{k}'$ の部分弧と真っすぐな線分から成る $\mathfrak{C}_1$ は，この平面をたかだか二つの領域 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{A}_1$ に分けうるだけであるから，これら二つの領域のうち，この平面の遠く離れた点を含む領域 $\mathfrak{A}_1$ に，O_1 または O_2 が属するはずである；それゆえ，二点 O_1, O_2 のうちの一つ，たとえば O_2 は $\mathfrak{C}_1$ に関して位数 0 をもたなければならない；このとき O_1 は $\mathfrak{C}_1$ に関して位数 ± 1 をもち，$\mathfrak{C}_1$ によって定められる二つの領域のうちの他の一つ，すなわち $\mathfrak{I}_1$ のなかにある.

全く同じようにしてわかることであるが，$\mathfrak{C}_2$ もこの平面を二つの領域 $\mathfrak{I}_2, \mathfrak{A}_2$ に分け，そのうちの $\mathfrak{A}_2$ がこの平面の遠く離れた点を含むことにすれば，さらにつぎの二つの場合のうちの一方が起こらなければならない：

1) $\underset{\mathfrak{C}_2}{\mathrm{ord}}(O_1) = 0,\quad \underset{\mathfrak{C}_2}{\mathrm{ord}}(O_2) = \pm 1$；$O_1$ が $\mathfrak{A}_2$ にある；

2) $\underset{\mathfrak{C}_2}{\mathrm{ord}}(O_1) = \pm 1,\quad \underset{\mathfrak{C}_2}{\mathrm{ord}}(O_2) = 0$；$O_2$ が $\mathfrak{A}_2$ にある.

1)の場合には，

$$\underset{\mathfrak{C}}{\mathrm{ord}}(O_1) = \underset{\mathfrak{C}_1}{\mathrm{ord}}(O_1) + \underset{\mathfrak{C}_2}{\mathrm{ord}}(O_1) = \pm 1$$

が得られ，われわれの主張と一致する．ここで，2)が起こりえないことを示そう.

$\mathfrak{k}_2'$ の点は，端点 E, F を除けば，$\mathfrak{A}_1$ のなかにある．実際，$\mathfrak{k}_2'$ の一点 Q のいくらでも近くに $\mathfrak{A}$ の点があり，これらの点とこの平面の遠く離れた点とは，$\mathfrak{k}'$ に出会わない連続曲線によって結ばれる；それゆえこの連続曲線は終始 $\mathfrak{A}$ 内を通り，したがってまた線分 EF にも $\mathfrak{k}_1'+EF=\mathfrak{C}_1$ にも出会わない．それゆえ Q のいくらでも近くに $\mathfrak{A}_1$ に属する点があり，しかも Q は $\mathfrak{C}_1$ 上にないから，Q 自身が $\mathfrak{A}_1$ のなかになければならない．$\mathfrak{I}_1$ は $\mathfrak{C}_1$ と出会わない曲線 $\mathfrak{c}$ によって O_1 と結ばれる点 J の全体から成る．$\mathfrak{c}$ 自身は全く $\mathfrak{I}_1$ のなかにあり，また $\mathfrak{k}_2'$ は端点を除いて $\mathfrak{A}_1$ のなかにあるから，$\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{k}_2'$ とも，したがって $\mathfrak{k}_2'+EF=\mathfrak{C}_2$ とも出会わない．さきに述べた第二の場合が起こったとすれば，O_1 は同時に $\mathfrak{I}_2$ のなかにあり，$\mathfrak{c}$ は曲線 $\mathfrak{C}_2$ に出会わないから，J もまた $\mathfrak{I}_2$ のなかにある．したがって $\mathfrak{I}_1$ の各点は $\mathfrak{I}_2$ の点である．全く同様にしてその逆もわかる；したがって $\mathfrak{I}_1$ は $\mathfrak{I}_2$ と同じものである．$\mathfrak{k}_2'$ は端点を除いて $\mathfrak{I}_1$ の境界に含まれず，同様に $\mathfrak{k}_1'$ は端点以外 $\mathfrak{I}_2$ の境界に含まれない．いま $\mathfrak{I}_1=\mathfrak{I}_2$ とすれば，$\mathfrak{I}_1$ の境界はそれゆえ線分 EF の点だけから構成される．しかし線分

EF はこの平面を分けないから，このことは不合理である．仮定2)の成り立たないことはこれで証明された．

この節の始めに述べた基本定理によって定められる回転の向き $\mathfrak{A}'$ を，領域 $\mathfrak{G}$ から $\mathfrak{G}'$ の上への写像 S' による $\mathfrak{A}$ の**像-回転の向き**と呼び，$\mathfrak{A}$ **は写像** S' **によって** $\mathfrak{A}'$ **に"移る"**ということにしよう．両側から一意領域連続な一つの写像 S' によって $\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{G}'$ の上へ，同じようなもう一つの写像 S'' によって $\mathfrak{G}''$ の上へ写像したときには，S' によって生じた $\mathfrak{A}$ の像-回転の向き $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}S'$ を，S'' によって生じた像-回転の向き $\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}S''$ に移す写像は，$\mathfrak{G}'$ を $\mathfrak{G}''$ に変換する写像 $S'^{-1}S''$ である．

与えられた多様体 $\mathfrak{F}$ の任意の一点 $\mathfrak{p}_0$ において一つの回転の向き $\mathfrak{A}$ を定めうるということを認識するには，これらの事実だけで足りる．$\mathfrak{p}_0$ の一つの近傍からユークリッド平面の一つの領域の上への，両側から一意領域連続な写像 S をとるごとに——この際 $\mathfrak{p}_0$ が O に移るとすれば——$\mathfrak{A}$ は O における状態を支配している像-回転の向き $\mathfrak{A}S$ によって知られるであろう．二つのこのような写像 S と T が与えられているときにはいつでも，$\mathfrak{p}_0$ の適当な近傍をとれば，二つの写像によってこの近傍の両側から一意領域連続な像がユークリッド平面内に描かれる．像-回転の向き $\mathfrak{A}S, \mathfrak{A}T$ は，写像 $S^{-1}T$ により $\mathfrak{A}S$ が $\mathfrak{A}T$ に移るようになっているはずである．(もちろん回転の向き $\mathfrak{A}$ を具体的に示すことは，或る<u>決まった</u>写像 S に対してユークリッド平面における像-回転の向き $\mathfrak{A}S$ を与えることを通じて，"像的に"しか行なわれえない)．

平面上の任意の二点 O_1, O_2 において，これらの点の位数を決定するために，<u>同じ</u>回転の向き $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_2$ を基礎に置くとき，このことはつぎの事実によって認められる：すなわち閉じた平面曲線 $\mathfrak{C}$ に出会わない曲線によって O_1, O_2 が結ばれる場合には，いつでも O_1, O_2 は $\mathfrak{C}$ に関して確かに同じ位数をもつ．O_1, O_2 が領域 $\mathfrak{G}$ のなかにあり，$\mathfrak{G}$ は両側から一意領域連続な写像 S' によって $\mathfrak{G}'$ に移されるとき，上の注意を $\mathfrak{G}$ 内の曲線 $\mathfrak{C}$ に適用すればわかるように，$\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_2$ から

$$\mathfrak{A}_1S' = \mathfrak{A}_2S'$$

が出て来る．それゆえ自然につぎの定義が得られる：

<u>多様体 $\mathfrak{F}$ の各点において回転の向き $\mathfrak{A}$ が定められているとき，これが $\mathfrak{p}_0$ に</u>

おいて**連続**であるといわれるのは，$\mathfrak{p}_0$ に適当な近傍があって，これを任意の方法で平面領域の上へ両側から一意領域連続に写像するとき，$\mathfrak{D}$ の像-回転の向きがこの領域のすべての点で 同 一 に なる場合である.

また，$\mathfrak{D}$ がいたるところで連続になるときだけ，この多様体 $\mathfrak{F}$ の上には**統一的な回転の向き**(einheitlicher Drehungssinn)が定められているということにしよう. $\mathfrak{F}$ 上に回転の向きをこのように“統一的に”定めることが可能であるとき，$\mathfrak{F}$ は**双側**(zweiseitig)であるといい(例: ユークリッド平面，球面，輪環面)，そうでないとき**単側**(einseitig)であるという[1](例: 射影平面，メービウスの帯). $\mathfrak{F}$ 上の閉曲線には，つぎの二通りの種類のものがありうる: 私がこの曲線の一点において定められた一つの回転の向きから出発して，これを曲線に沿って連続的に接続すれば，出発点に戻ったとき私は同じ回転の向きを得るか，または逆の向きを得るかのどちらかである. 双側の面の上には第一種の曲線しかないが，単側の面の上には第一種のものも，第二種のものも存在する. このことから上記の名づけ方が説明される. すなわち，第二種の曲線に沿って回転の向きが逆になるということは，メービウスの帯のような単側の空間曲面について見ると，私がこの曲線に沿って歩けば，この曲面の一つの“側”からもう一つの“側”に到達すること，したがってこの曲面は事実二つの切り離された“側”を決してもたないという形にいい表わされる. 単側の面 $\mathfrak{F}$ の真上にはいつでも非分岐無境界な，二葉の，双側の被覆面が存在する; すなわちこの面上で一つの曲線が閉じるのは，$\mathfrak{F}$ におけるその射影曲線が閉じているばかりでなく第一種であるとき，またそのときに限るとするのである. この被覆面の二枚の‘葉’は，$\mathfrak{F}$ の一つの“側”およびもう一つの“側”とみなしうる.

いまからわれわれが考える面 $\mathfrak{F}$ については，それが双側であり，したがってその上には一つの統一的な回転の向きが定められており，一定の三角形分割 ζ が与えられていると仮定しよう. この三角形分割の一つの三角形 $\triangle$ が頂点 1, 2, 3 をもつとする; $\triangle$ を平面上の正三角形 D に写像するために，$\triangle$ の各点に対応する座標比 $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ を D 内の像点の(D の頂点に関して定められた)同次重心座標と同じにする. この写像 S は $\triangle$ と D の内部に対して両側から領域連続である. それゆえ $\mathfrak{D}$ は D のすべての内点において決まった像-回転

1) 単側性に関するこの定義は，Klein, Math. Ann., **9**(1876), 479 ページによって与えられた.

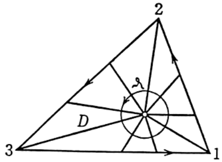


図 17. 回転の向きと表示.

の向き λS をつくり，しかもすべての点において同じである；ところでこれは，図からわかるように，D の境界の上に一定の回転の向きを導き，それによって三頂点の循環的順序すなわち D および $\triangle$ の**表示**(Indikatrix)：

$$(1\,2\,3) = (2\,3\,1) = (3\,1\,2)$$

$$(2\,1\,3) = (1\,3\,2) = (3\,2\,1)$$

のうち，いずれか一方が決定される．

三角形分割の各三角形に対して一定の表示を得たのちに，私は辺12に沿って隣り合う二つの三角形，すなわち，頂点123をもつ $\triangle_3$ と頂点124をもつ $\triangle_4$ を観察しよう．私がいいたいこと：あらかじめ与えられた表示どおりに $\triangle_3$ の周をまわるときには，表示によって与えられたように $\triangle_4$ の周をまわるときと<u>逆の</u>向きに辺12を通過する．私はこのことを簡単にいい表わすために，$\triangle_3$ と $\triangle_4$ の表示は**同調**(kohärent)しているという．平面上に，辺12で隣り合う二つの正三角形 $D_3=(1\,2\,3)$，$D_4=(1\,2\,4)$ を描こう．$\triangle_3$ はその点の座標比を通じて D_3 の上へ連続的に写像され(この写像を S_3 とする)，また $\triangle_4$ は D_4 の上へ写像される(写像 S_4)．このとき同じ数字で表わされた頂点は一致する．$\triangle_3, \triangle_4$ の共通辺は D_3, D_4 の共通辺の上へ二度，一度は S_3 によって，もう一度は S_4 によって写像される．この辺に対して，$S_4^{-1}S_3$ は両側から一意連続な写像であり，この写像によって両端点はいずれもそれ自身に移る．私は辺12の上に(どちらの端点でもない)点 $\mathfrak{p}$ を，$\triangle_3$ の内部に点 $\mathfrak{p}_3$ を，$\triangle_4$ の内部に点 $\mathfrak{p}_4$ を選び，

$$p_3 = \mathfrak{p}_3 S_3, \quad p_4 = \mathfrak{p}_4 S_4 \;; \quad p^3 = \mathfrak{p} S_3, \quad p^4 = \mathfrak{p} S_4$$

とする．D_4 を両側から一意連続にそれ自身の上へ写像し(写像 s_4)，しかも p^4 から出る線分 $p^4 p$ (p は D_4 の周にとる)はそれぞれ線分 $p^3 p$ に移るが，辺12の上では s_4 が $S_4^{-1}S_3$ と一致するようにすることはやさしい．図18によってこのような写像が示されている．こうすれば，$\triangle_3$ では $=S_3$, $\triangle_4$ では $=S_4 s_4$

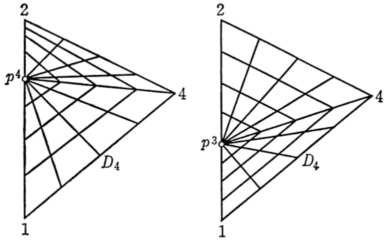


図 18. 三角形 D_4 からそれ自身への写像.

となるような写像 T_3 によって，$\triangle_3+\triangle_4$ の内部は菱形 D_3+D_4 の内部の上へ両側から一意領域連続に写像される．同じようにして，$\triangle_4$ においては S_4 と一致する写像 T_4 がつくられる．$T_3^{-1}T_4$ は D_3+D_4 からそれ自身への両側から一意連続な写像であり，これによれば，点 p^3 を通る直線的な動径の束は点 p^4 を通る直線的な動径の束に移り，菱形の境界上の各点は動かない．点 $\mathfrak{p}_3$ と $\mathfrak{p}$ で支配している回転の向き $\mathfrak{r}$ の像 $\mathfrak{r}T_3$ を描こう．このとき p^3 における $\mathfrak{r}T_3$ は p_3 におけるのと同じ回転の向きである．p_3 あるいは p^3 を通る動径がこれらの点のまわりを回転の向き $\mathfrak{r}T_3$ に従ってまわるとき，この動径の終点が菱形の周囲を，たとえば 13241 の向きに動くとしよう．写像 $T_3^{-1}T_4$ によって，点 p^3 における $\mathfrak{r}T_3$ は点 p^4 における $\mathfrak{r}T_4$ に移る．それゆえ，p^4 を通る動径がこの点のまわりを回転の向き $\mathfrak{r}T_4$ に従ってまわるとき，この動径の終点もまた同じように菱形を 13241 の向きに描くことは明らかである．その結果として，同じことはまた，p_4 を通る動径がこの点のまわりを回転の向き $\mathfrak{r}T_4$ に従ってまわるときにも成り立つ．ところが p_3 における $\mathfrak{r}T_3=\mathfrak{r}S_3$ は D_3 の表示に対する規準を与え，p_4 における $\mathfrak{r}T_4=\mathfrak{r}S_4$ は D_4 の表示に対する規準を与えるものである；上に仮定した場合ならば，(321) が D_3 の，(412) が D_4 の表示である．

それゆえ，三角形分割された面 $\mathfrak{F}_\zeta$ の上の統一的な回転の向き $\mathfrak{r}$ は ζ の各基本三角形に一つの表示を導き，この表示は隣り合うどの二つの三角形においても互いに同調している．ところでわれわれの考えたことから，逆の結果もただちに得られる：すなわち，ζ の各三角形 $\triangle$ に一つの表示が対応させられ，それが隣り合うどの二つの三角形においても同調しているならば，これによって

$\mathfrak{F}$ 上に一つの統一的な回転の向き $\mathfrak{r}$ が定められ，それはさきに与えられた表示を各 △ に導入する[1]. それゆえ，各 △ に適当な表示を割り当て，隣り合うどの二つの三角形にも互いに同調している表示を与えることが可能であるとき，それによって面 $\mathfrak{F}_c$ の双側性を知ることができる.

例: §5に与えられた射影平面の分割表から，その単側性が純粋に組み合せ論的に得られる. その分割表はつぎのように書かれる:

(Ⅰ Ⅱ Ⅲ)

(1 Ⅱ Ⅲ)　(Ⅰ 2 Ⅲ)　(Ⅰ Ⅱ 3)

(1 Ⅱ 2)　(1 3 Ⅲ)　(Ⅰ 2 1)　(3 2 Ⅲ)　(Ⅰ 1 3)　(2 Ⅱ 3)

この書き表わし方においては，最後の行の各三角形が(Ⅰ Ⅱ Ⅲ)に間接的に同調している; 同調していない形に書かれた中間項として，第二行の各三角形が現われる. 射影平面が双側であるとすれば，この分割表における最後の行の六つの三角形のうち，同じ二つの文字を含む二つの三角形はそれぞれ同調していなければならない; しかし実際には同調していない三つの組

(1 Ⅱ 2)　(1 3 Ⅲ)　(3 2 Ⅲ)
|　|　|
(Ⅰ 2 1)　(Ⅰ 1 3)　(2 Ⅱ 3)

が現われる.

[付記: さきになされた一般的な考察においては，三角形分割において隣り合う三角形の対をいつでも菱形の上へ両側から一意連続に写像する(その際頂点は頂点に移る)ことができるという事実を利用した. 同じようにして，三角形の星をユークリッド平面の正多角形の上へ両側から一意連続に写像し，しかも星の内部にある頂点は多角形の中心へ，星の周上の頂点は多角形の頂点へ移るようにすることができる. この多角形を何らかの方法で三角形 D に分割し，多角形の周には新しい頂点が現われず，多角形の中心は三角形 D のどれか一

1) この性質，すなわちすべての基本三角形に，同調している表示を割り当てることができるという性質によって，Möbius(1865; 全集，第Ⅱ巻，477ページと482ページ)もBrouwer(Math. Ann., 71, 101ページ)も双側の面を定義する. この性質が面に属し，それの三角形分割の仕方によらないということに対する証明は，ここに述べたのとは違った方法でBrouwer, Math. Ann., 71, 324ページ(脚注)が与えている; 彼の証明は n 次元多様体に対しても適用される.

つの内部に落ちるようにすれば，これによってこの面のもとの三角形分割は，三角形の星一個の内部で修正され，前には頂点であった一つの点が今度は一つの基本三角形の内部にはいることになる.]

三角形分割された面 $\mathfrak{F}_\zeta$ において，決まった三角形 $\triangle_0$ から出発し，これには一定の表示を割り当てておこう；そして $\triangle$ は分割 ζ に属するもう一つの任意の基本三角形であるとすれば，三角形の単純な鎖：

(K) $\triangle_0, \triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_m = \triangle$

によって $\triangle_0$ を $\triangle$ と結ぶことができる．$\triangle_1$ には $\triangle_0$ の表示と同調する表示を割り当て，$\triangle_2$ には $\triangle_1$ のそれと同調する表示を割り当て，以下同様としよう；こうしてこの鎖の各三角形に，最後には $\triangle$ 自身にも決まった表示が与えられる．

(K′) $\triangle_0' = \triangle_0,\ \triangle_1', \triangle_2',\ \cdots,\ \triangle_n' = \triangle$

は $\triangle_0$ を $\triangle$ と結ぶもう一つの単純な鎖であるとすれば，この鎖においても $\triangle_0$ の表示を同調の原理によって接続することができる．どの鎖においても $\triangle$ の表示として同一のものに到達し，しかもこのことが，どの三角形を終りの $\triangle$ としても成り立つならば，この面は双側でなければならない．それゆえ面が単側ならば，或る三角形 $\triangle$ に対して，適当な二つの鎖 (K) と (K') が存在し，これらが終りの三角形 $\triangle$ を異なる表示に導くであろう．私は鎖 (K) の三角形のうち，(K') にも現われるものを，(K) に現われる順に書き並べよう：

(13) $\triangle_0,\ \triangle_i,\ \triangle_k,\ \cdots,\ \triangle_m.$

これらのうち，鎖 (K') において与えられる表示が鎖 (K) における表示と異なるような最初の三角形をたとえば $\triangle_l$(場合によっては $\triangle_m$ が最初になる)とし，列(13)において $\triangle_l$ の一つ前にある三角形を $\triangle_k$ とする．$\triangle_k$ を $\triangle_l$ と結ぶ鎖 (K) の一部と，$\triangle_l$ から $\triangle_k$ に導く鎖 (K') の一部をつなげば，(それ自身を横切らない)閉じた三角形の鎖が得られる．この鎖においては，表示を同調の原理に従って接続するとき，それは逆になる．それゆえ単側の面においては，同調の条件を満たす表示の実行不可能なことが，すでに或る単純な閉じた三角形の鎖 K_0 において判定されるはずである．

このような鎖 K_0 の各三角形のなかにつぎのような基本線分 σ を描こう：すなわち σ は鎖 K_0 における一つ前の三角形と接する辺上の一点から出て，一つ

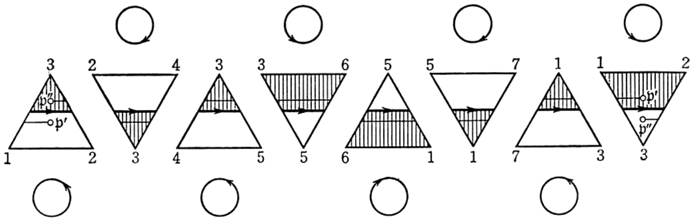


図 19. (回転する円によって表わされている)表示が逆になるような三角形の鎖と，別々の岸をもたない多角形(π)．(π のすぐ近くを通る道によって，$\mathfrak{p}''$ と $\mathfrak{p}'$ は π を越えずに結ばれる.)

あとの三角形と接する辺上の一点に至り，しかもこれらすべての基本線分 σ によって一つの閉じた多角形 π がつくられるようにする；このとき π は別々の岸をもたない：π をあたかも一つの堀のように考え，それに沿って一つの歩道がつけられているとすれば，われわれが堀を一周するとき，この歩道はわれわれを出発点に連れ戻さず，π の対岸に導く．このことは図によって明らかになるであろう；ここでは鎖 K_0 の三角形がユークリッドの三角形によって表わされており，太線で書かれた線分が多角形 π をつくる．**別々の岸**をもたないという π の性質を厳密に定式化すれば，つぎのようになる：$\mathfrak{F}$ 上には π を含み，π によって分けられる領域が一つもない．このことから，単葉型の面はつねに双側であることが出て来る．

逆に：双側の面の上では，一つの多角形 π が別々の岸をもたないということは決して起こりえない．必要があれば ζ を部分分割に置き換えることによって，π は辺ばかりから成ると仮定することができる．π の頂点は順に

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ n+1=1,\ \cdots$$

であるとする．この面は双側であるとしたから，各三角形に一定の表示が付けられ，これらは互いに同調する．辺 12 をもつ二つの三角形のうちの一方においては，その表示によってあらかじめ与えられたとおりに周をまわるとき，辺 $\overrightarrow{12}$ を矢印の向きに通過する．これを $\triangle^0$ としよう．$\triangle^0$ から出発して，図からわかるような仕方で，私は三角形の列 $\triangle^1, \triangle^2, \triangle^3, \cdots$ をつくる；このとき，これらの三角形はすべて π に境を接し，番号の続いたどの二つも，π に属さない一辺を共有する．この鎖の三角形で，π 上にある辺 $h, h+1$ をもつものに与

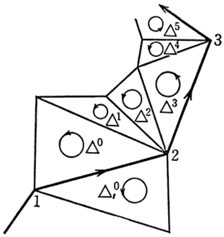


図 20. 一つの多角形の左岸.

えられている表示は，これによって決められたとおりにまわるとき，辺 $\overrightarrow{h, h+1}$ が矢印の向きに描かれるようになっている．{たとえば図の $\triangle^3$ に対してこのことを理解するには，$\triangle^0$ の表示を同調の条件により鎖 $\triangle^0\triangle^1\triangle^2\triangle^3$ に沿って接続すればよい.} 有限回の手続きののち，私は12を辺にもつ三角形にはじめて帰って来る．その表示は(12∗)と書かれるはずである；したがってそれはほかならぬ三角形 $\triangle^0$ であり，辺12をもつもう一つの三角形 $\triangle_{,}^{0}$ ではありえない；後者は表示(21∗)をもつからである．こうして $\triangle^0$ から得られた鎖は π の一つの岸をつくり，同じようにして辺12をもつもう一つの三角形 $\triangle_{,}^{0}$ から導き出される鎖はもう一つの岸をつくる．

リーマン面はいずれも双側である.

$\mathfrak{p}_0$ は一つのリーマン面上の点，t', t'' は $\mathfrak{p}_0$ に属する任意の二つの局所一意化変数で，これらは $\mathfrak{p}_0$ の或る一つの近傍をそれぞれ平面領域 $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}''$ の上へ写像し，この際点 $\mathfrak{p}_0$ にはそれぞれ点 $t'=0$, $t''=0$ が対応するとしよう．これらの写像を T', T'' と名づけておく．$\mathfrak{G}'$ から $\mathfrak{G}''$ の上への写像 $T'^{-1}T''$ は，

$$t'' = \mathfrak{G}' \text{ における } (t') \text{ の正則関数}$$

という式によって表わされる．$\mathfrak{A}'$ は t' 平面の原点における回転の向きであり，これに従って正の実軸を $90°$ だけまわせば正の虚軸に移るものとする．同じ仕方で t'' 平面の原点における回転の向き $\mathfrak{A}''$ が定められる．私がいいたいのは，写像 $T'^{-1}T''$ によって $\mathfrak{A}'$ が $\mathfrak{A}''$ に移るということである．このことから，$\mathfrak{A}'$ と $\mathfrak{A}''$ を $\mathfrak{p}_0$ において定められた回転の向き $\mathfrak{A}$ の，写像 T', T'' によって生ずる像とみなすことが許され，$\mathfrak{A}$ はこれにより局所一意化変数の選び方に無関係な仕方で確定する．このようにリーマン面の各点 $\mathfrak{p}_0$ に対して定められる回

転の向き $\mathfrak{R}$ はまたいたるところで連続である——これについてはもはや証明するまでもない——から，リーマン面の双側性は確かめられる.

$\mathfrak{G}'$ において $t'=0$ のまわりに小さい円 $\mathfrak{k}'$:

$$t' = ae^{i\varphi} \qquad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

を描こう［$a>0$ は定数の半径である］. $T'^{-1}T''$ によって $\mathfrak{G}''$ のなかに描かれる $\mathfrak{k}'$ の像を $\mathfrak{k}''$ とする. “位数”という概念の定義によれば，

$$2\pi i \cdot \underset{t''}{\mathrm{ord.}}(t''=0) = \int_{\mathfrak{k}''} \frac{dt''}{t''}$$

である. ところで

$$\frac{dt''}{t''} = \left(\frac{1}{t'} + a_0 + a_1 t' + a_2 t'^2 + \cdots\right) dt$$

が成り立ち，このなかのベキ級数は，$\mathfrak{k}'$ を内部に含む t' 平面の或る円のなかで収束する. それゆえ

$$\int_{\mathfrak{k}''} \frac{dt''}{t''} = \int_{\mathfrak{k}'} \frac{dt'}{t'} = 2\pi i$$

となり，これによって $\underset{t''}{\mathrm{ord.}}(t''=0)$ は $=+1$ で，$=-1$ ではないこと，すなわち $\mathfrak{R}'$ は写像 $T'^{-1}T''$ によって $\mathfrak{R}''$ に移ることが証明される.

リーマン面 $\mathfrak{F}$ にどのような三角形分割がなされていても，いま定めた“正の”回転の向き $\mathfrak{R}$ は各基本三角形に“正の”表示を導く. dz は三角形分割されたこの面の一つの基本三角形およびその境界のすべての点において正則な微分であるとすれば，この三角形の周に沿って正の表示の向きにとられた dz の積分は 0 に等しい. これに反して，dz が周まで含めたこの三角形において，内部にある一つの極を除けば，すべての点で正則であるとき，上記の積分は ＝ その極における留数の $2\pi i$ 倍 である.

dz が閉じたリーマン面 $\mathfrak{F}$ の上で極を除いて正則であるならば，$\mathfrak{F}$ を基本三角形に分割するとき，極は三角形の内部にはいり，同じ一つの三角形の内部には二つ以上の極が決してはいらないようにすることができる(73 ページ). すべての三角形の周に沿って正の表示の向きに積分 $\int dz$ をとって加えれば，dz のすべての留数の和の $2\pi i$ 倍を得る. ところがすべての三角形の周を正の表示の向きに動くときには，同調の関係から各辺を二度ずつ，しかも反対の向きに

通過する. したがって上記の積分の和がもう一方では $=0$ でなければならない; こうしてわれわれはつぎの定理を得る:

閉じたリーマン面の上で，極を除いて正則な微分の留数の和は0である.

§11. 積分関数. 示性数. 標準切断.

リーマン面の上で微分を積分する手続きは，任意の面に対してつぎのような一般化によって置き換えられる.

面 $\mathfrak{F}$ 上の各曲線 γ に一つの数 $F(\gamma)$ が対応させられているとき，$\mathfrak{F}$ 上に**曲線関数** F が定義される; このとき $F(\gamma)$ は曲線 γ に対する F の**値**と呼ばれる. 二つの曲線 γ', γ'' に対して，γ' の終点と γ'' の始点が一致するとき，これらをつないでただ一つの曲線 $\gamma=\gamma'+\gamma''$ がつくられる; このときつねに

$$F(\gamma'+\gamma'') = F(\gamma')+F(\gamma'')$$

であるならば，この曲線関数は**線形**であるという. 線形曲線関数が一つの閉曲線に対してとる値は，この閉曲線の始点をその上でずらしても変わらない. F がすべての閉曲線に対して値0をとるとき，われわれは $F\sim 0$(F は0に**位相合同**(homolog))と書く. この場合には面の上に一つの“点関数” $f(\mathfrak{p})$ が存在して，各曲線に対して

$$F(\gamma) = f(\mathfrak{p}_2)-f(\mathfrak{p}_1)$$

となる; ただし，$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ はそれぞれ γ の始点と終点を意味する. われわれは，いたるところで“局所的に”~ 0 である線形曲線関数だけを考える; これらは“**積分関数**(Integralfunktion)”と呼ぶことができよう. 定義により，この面の各点に対して適当な近傍が存在し，この近傍のなかを通るどの閉曲線 γ_0 に対しても $F(\gamma_0)=0$ でなければならない. 積分関数 F に対してはつねに

$$F(-\gamma) = -F(\gamma)$$

が成り立つ; ただし $-\gamma$ は γ を反対の向きにたどる道を意味する: すなわち

$$\gamma : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\lambda) \quad [0 \leqq \lambda \leqq 1]; \qquad -\gamma : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(1-\lambda) \quad [0 \leqq \lambda \leqq 1].$$

単連結な面，したがって特に普遍被覆面の上では，どの積分関数も ~ 0 である.

積分関数に定数因数を掛けること，およびこれらの関数を加えることができる. 積分関数 $F_1, \cdots, F_m$ のあいだに，全部は消えない定数係数 c によって，

位相合同関係

$$c_1F_1+\cdots+c_mF_m \sim 0$$

が成り立つとき，これらは**線形従属**であるという．有限個，たとえば h 個の線形独立な(線形従属でない)積分関数 $F_1, \cdots, F_h$ があって，任意の積分関数 F はこれら h 個の積分関数の定数係数による一つの線形結合に位相合同であるとき，$F_1, \cdots, F_h$ は位相合同でない積分関数から成る線形空間(lineare Schar)における“**基底**”をつくり，基底関数の個数 h(これは明らかにすべての基底に対して同じである)はこの空間の“**次元**(Grad)”と呼ばれる．われわれが積分関数を考えている面 $\mathfrak{F}$ については，この値をまた $\mathfrak{F}$ の“**連結度**(Zusammenhangsgrad)”[1]ということにしよう．積分関数に対して有限な基底が存在しないときには，$\mathfrak{F}$ は無限に高い連結度をもつ．

われわれは特に多面体 $\mathfrak{P}$ に注目し，その連結度 h を $\mathfrak{P}$ の三角形の個数 d, 内部の頂点と内辺の個数 e, k によって表わすことを考えよう．$\mathfrak{P}$ を構成する有限個の三角形 $\triangle$ の一つ一つに，われわれは重心(1:1:1)を入れる．$\triangle_1, \triangle_2$ は(以下の議論でもつねに同様であるが)これらの三角形のうち，$\mathfrak{P}$ の内辺に沿って隣り合う任意の二つであり，$\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ はそれらの重心であるとすれば，$\triangle_1+\triangle_2$ の内部を通って $\mathfrak{s}_1$ から $\mathfrak{s}_2$ に至る各曲線 γ に対して，積分関数 $F(\gamma)$ は同じ値をとるから，これを $x_{\triangle_1\triangle_2}[F]$ と書き表わそう．このことは，個々の三角形ばかりでなく，三角形の対 $\triangle_1+\triangle_2$ もまた単連結であるということに基づく．つねに $x_{\triangle_1\triangle_2}=-x_{\triangle_2\triangle_1}$ である．$\mathfrak{e}$ は $\mathfrak{P}$ の内部にある頂点，$\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_r$ は $\mathfrak{e}$ のまわりに集まる三角形を循環的な順序に並べたものとすれば，

$$\text{(e)} \qquad x_{\triangle_1\triangle_2}+x_{\triangle_2\triangle_3}+\cdots+x_{\triangle_r\triangle_1}=0$$

でなければならない；三角形の星もまたすべて単連結であるからである．(三角形列 $\triangle_i$ の循環的な順序，すなわち三角形の星の表示(Indikatrix)を逆にすれば，この等式の左辺は符号を変える.) いま述べた諸条件に従って数 $x_{\triangle_1\triangle_2}$ の系を任意に与えるとき，これらの $x_{\triangle_1\triangle_2}$ を上に決めたように導く積分関数がいつでも一つあることは容易にわかる[2]．積分関数 F が ~ 0 となるのは，$\mathfrak{P}$ の各

1) この数はリーマンの“連結数(Zusammenhangszahl)”に対応するが，閉じた面に対してはそれよりも1だけ低い．Schläfli, Crelles Journal, **76**, 152ページ，脚注，および Klein, Math. Ann., **7**, 550ページ，脚注を参照．

2) たとえばつぎのようにする：一つ一つの‘三角形の星’において，私は三角形 $\triangle_1, \cdots, \triangle_r$($\triangle_{r+1}$

三角形 △ に一つの数 $g_{\triangle}$ が対応し, $\mathfrak{P}$ の内辺を共有するすべての三角形対 $\triangle_1\triangle_2$ に対して,

$$x_{\triangle_1\triangle_2}[F] = g_{\triangle_2} - g_{\triangle_1}$$

となるときであり，またそのときに限る.

符号だけ異なる二つの数 $x_{\triangle_1\triangle_2}$, $x_{\triangle_2\triangle_1}$ の各対からはいつも一つだけを選んでおき，三角形 $\triangle_1, \triangle_2$ の共通辺に対応させると，k 個の“未知数” x を得る；これらのあいだには e 個の同次線形方程式(e)が成り立ち，これらは $\mathfrak{P}$ の内部の頂点 e に一つずつ対応する．これらの方程式は互いに線形独立であろうか？いま，これらの左辺のあいだに，$y_{\mathfrak{e}}$ を係数とする一つの恒等関係が成り立つ[1]とする．$\mathfrak{P}$ の内部に両端点 e と f をもつ辺 ef を考えよう．頂点 e と f に属する二つの方程式は，e と f に属する二つの‘三角形の星’の，互いに同調する表示：

(e)　$\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, …, $\triangle_r$

(f)　$\triangle_1' = \triangle_2$, $\triangle_2' = \triangle_1$, $\triangle_3'$, …, $\triangle_s'$

に対応する形に書かれているとしてよい．このとき未知数 $x_{\triangle_1\triangle_2}$ はこれら二つの方程式にだけ，しかも反対の符号をもって現われるから，$y_{\mathfrak{e}} = y_{\mathfrak{f}}$ でなければならない．これに反して，一端 e が $\mathfrak{P}$ の内部に，他端・が $\mathfrak{P}$ の境界にあるような辺 e・を考えれば，同じようにして $y_{\mathfrak{e}} = 0$ ということがわかる．$\mathfrak{P}$ が開いているときには，内部の各頂点から境界に達する辺の折れ線 ef…l・をとること

$= \triangle_1$)に数 $g_1, \cdots, g_r$ ($g_{r+1} = g_1$) を対応させ，

$$x_{\triangle_1\triangle_2} = g_2 - g_1,\quad x_{\triangle_2\triangle_3} = g_3 - g_2,\quad \cdots,\quad x_{\triangle_r\triangle_1} = g_1 - g_r$$

とすることができる．私はこの星の内部で一つの点関数 f をつぎのように定義する：f は三角形 $\triangle_i$ の内部では $= g_i$, $\triangle_i$ と $\triangle_{i+1}$ を分ける辺上では端点を除いて定数の値 $\frac{1}{2}\{g_i + g_{i+1}\}$ をとり，$\triangle_i$ の共通の頂点では r 個の数 g_i の算術平均に等しくなる．この星の内部を通る曲線 $\gamma = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$ に対しては $F(\gamma) = f(\mathfrak{p}_2) - f(\mathfrak{p}_1)$ と定めよう．私はすべての g_i を同じ数だけ増すことができ，その限りにおいて g_i の選び方には任意性がある；しかしこのことは $F(\gamma)$ に影響を及ぼさない．γ が同時に二つの‘三角形の星’の内部にある(すなわち，これらの星が γ を含む一対の三角形を共有する)場合，二つの‘三角形の星’のどちらを使って私が上記の計算をしても，$F(\gamma)$ の値はそれによって変わらない．γ が任意の曲線であるとき，私はこれを有限個の弧 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ に分割して順に並べ，各 γ_i は或る‘三角形の星’の内部にすっかりはいるようにすることができる．このとき私は

$$F(\gamma) = F(\gamma_1) + F(\gamma_2) + \cdots + F(\gamma_n)$$

とおく．私が部分弧 γ_j への分割をあらかじめどのようにとっても，この定義によりいつも同じ値が出て来る．二つの異なる分割に対して得られる二つの値を比較し，その一致を確かめるには，両方の分割を同時に採用するだけでよい．$F(\gamma)$ はわれわれの求める積分関数である．

1)(訳注)　左辺の線形結合が恒等的に消える.

ができるから，

$$y_{\mathfrak{e}} = y_{\mathfrak{f}} = \cdots = y_{\mathfrak{l}} = 0$$

を得る．$\mathfrak{P}$ が閉じているけれども単側であるときには，$\mathfrak{e}$ から出て $\mathfrak{e}$ に戻る辺の折れ線を適当にひき，これを一周するあいだに表示を逆にすることができる：この折れ線に沿って頂点から頂点へと一周すれば，$y_{\mathfrak{e}}=-y_{\mathfrak{e}}$，それゆえまた $y_{\mathfrak{e}}=0$ を得る．$\mathfrak{P}$ が閉じていて双側であるときには，$\mathfrak{P}$ 上のすべての‘三角形の星’に，互いに同調する表示を与え，方程式(e)の一つ一つをこの表示に従って書き表わそう．このときはどの二つの頂点をも辺の折れ線によって結ぶことができるから，すべての $y_{\mathfrak{e}}$ は互いに等しいことがわかる；そしてこのときには実際，方程式系(e)の左辺のあいだに，$y_{\mathfrak{e}}=1$ を係数とする恒等関係が成り立つ．それゆえ，閉じた双側の多面体に対しては $\varepsilon=0$，その他の場合には $\varepsilon=1$ とおけば，方程式系(e)は $k-e+1-\varepsilon$ 個の線形独立な解をもつ．

$\mathfrak{P}$ の各三角形 $\triangle$ に一つの数 $g_{\triangle}$ を任意に対応させると，一般的な式 $x_{\triangle_1\triangle_2}=g_{\triangle_2}-g_{\triangle_1}$ によって，問題になっている方程式系の解がつねに一つ得られる；こうしてできる解について，これは ~ 0 であるということにしよう．数の系 $\{g_{\triangle}\}$ は d 次元の線形空間をつくる．このような系がすべての $g_{\triangle_2}-g_{\triangle_1}$ に対して 0 を与えるのは，$g_{\triangle}$ がすべての三角形 $\triangle$ に対して同じ値をとるときであり，またそのときに限る(ここでわれわれは，$\mathfrak{P}$ が連結であることを使っている)．それゆえ，(e)の解のうち ~ 0 となるものは，$d-1$ 次元の線形空間をつくる．これを越える分

$$(k-e+1-\varepsilon)-(d-1)=(k-e-d+2)-\varepsilon$$

によって，$\mathfrak{P}$ 上の線形独立な積分関数の個数につき，求める最大値 h が与えられる．上の考察によって明らかにされた h の意味から出て来る結果として，閉じた面に対する上記の量は，面の三角形分割の方法には全く無関係である[1)]；

1) 普通は，与えられた面を切断して単連結なものに変え，これを利用して(Riemann による)連結数が定義される；しかし位置解析においては，このときの切断線として任意の連続曲線を許さないわけにはゆかない；ところがこうして定義される数が面だけによって決定されるということに対する証明は厳密ではなく，そうかといって厳密な形になおすのも容易でないように思われる．われわれはここで新しい定義を基礎に置いたが，この定義は関数論的応用(アーベル積分の理論)と密接に結びついており，またこれによって上記の難点が避けられている．確かにわれわれのとり扱い方によって，Weierstraß, Hensel-Landsberg その他の人々が代数関数論において用いた方法に固有なその核心，すなわちまず積分の挙動を調べ，それから積分の道に関する結論をひき出すということが，あらゆる関数論的な偶然から解放された形ではっきり示されるということができよう．——閉じた，双側の，

その上また，つねに $h \geqq 0$ でなければならない.

l 個の閉じた道 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l$ のあいだに，数 c_i を係数として**位相合同関係** (Homologie)[2)]

$$c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+\cdots+c_l\gamma_l \sim 0$$

が存在するというのは，すべての積分関数 F に対して等式

$$c_1F(\gamma_1)+c_2F(\gamma_2)+\cdots+c_lF(\gamma_l)=0$$

が成り立つことを意味する．いま考えている面が有限な連結度 h をもつならば，$l>h$ 個の閉じた道のあいだにはいつでも，全部は消えない係数をもつこのような位相合同関係が成り立つ．なぜなら，このような係数を求めるためには，積分関数に対する基底をつくるような $F_1, \cdots, F_h$ をとり，h 個の同次線形方程式

$$c_1F_i(\gamma_1)+c_2F_i(\gamma_2)+\cdots+c_lF_i(\gamma_l)=0 \quad [i=1, \cdots, h]$$

を解きさえすればよいからである．それゆえ，或る個数 $h'(\leqq h)$ の閉じた道 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{h'}$ が存在して，これらのあいだには(全部は 0 でない係数による)位相合同関係が決して成り立たないけれども，$h'+1$ 個の閉じた道のあいだにはいつでも位相合同関係が成り立つはずである．このとき $\gamma_1, \cdots, \gamma_{h'}$ は位相合同でない閉じた道から成る空間に対して一つの基底をつくり，h' はこの空間の次元である．さきに $h' \leqq h$ を見いだしたのと同じようにして，$h \leqq h'$ が証明される；したがって $h'=h$ である.

われわれの空間を構成する対象(閉じた道)の特殊な性格がもたらす結果として，つぎのような基底 $\gamma_1, \cdots, \gamma_h$ を見いだすことができる：すなわちすべての閉じた道 γ に対して，整 の 係数 $n_1, \cdots, n_h$ による位相合同関係

$$\gamma \sim n_1\gamma_1+\cdots+n_h\gamma_h$$

が存在する．まず $\gamma_1', \gamma_2', \cdots, \gamma_h'$ は閉じた道の任意の基底であるとしよう．閉じた線

$$\gamma \sim r_1\gamma_1'+r_2\gamma_2'+\cdots+r_h\gamma_h'$$

の一つ一つに，h 次元デカルト空間のなかで座標 $(r_1, r_2, \cdots, r_h)$ をもつ点を対応

単連結な多面体に対して成り立つ等式 $e+d-k=2$ はオイラーの多面体公式と呼ばれる．S. Euler, Petrop. Novi Comm., 4(1752-53), 109 ページ.

2) Poincaré, Analysis situs, Journal de l'École polytechnique, Ser. 2, 1(1895), 19 ページを参照.

させる:

$$\gamma \sim (r_1, r_2, \cdots, r_h).$$

こうしてすべての閉曲線に対応させられた点の系 G は一つの“**格子**”をつくる; すなわち点 $(r_1, r_2, \cdots, r_h)$ とともに $(-r_1, -r_2, \cdots, -r_h)$ もまた G に属し, $(r_1', r_2', \cdots, r_h')$, $(r_1'', r_2'', \cdots, r_h'')$ が G に属する任意の二点ならば, つねに

$$(r_1'+r_1'', r_2'+r_2'', \cdots, r_h'+r_h'')$$

も G に含まれる. なぜなら, 二つの閉じた道 γ', γ'' からいつでも一つの閉じた道

$$\gamma \sim \gamma'+\gamma''$$

をつぎのようにして求めることができるからである: すなわち, γ' 上の一点 $\mathfrak{p}'$ から出発して γ' を一周し, つぎに $\mathfrak{p}'$ から任意の曲線 σ に沿って γ'' の点 $\mathfrak{p}''$ に至り, $\mathfrak{p}''$ から γ'' を一周し, 最後に σ に沿って逆の向きに $\mathfrak{p}'$ に戻る. 特に, 整数の座標をもつ点はすべて G に属する.

しかしながら, 原点 $(0, 0, \cdots, 0)$ の任意の近傍に格子点があるわけではなく, つぎのような性質をもつ整数 N が存在するのである: すなわち G に属する各点の座標は N を掛けることによって整数に変わる. 証明: 方程式系(e)の係数は整数であるから, 特に h 個の整数解

$$\{x_{\triangle_1\triangle_2}{}^{(i)}\} \qquad [i = 1, 2, \cdots, h]$$

を定め, 他のすべての解は位相合同の意味でこれらから線形に構成されるようにすることができる. これら h 個の解には h 個の線形独立な積分関数 F_i が対応し, 各閉曲線に対してこれらがとる値は整数である[1]. 0 ではない行列式

$$|F_i(\gamma_j')|_{\substack{i=1,2,\cdots,h \\ j=1,2,\cdots,h}} = N$$

とおけば, 方程式系

$$r_1F_i(\gamma_1')+r_2F_i(\gamma_2')+\cdots+r_hF_i(\gamma_h') = F_i(\gamma) \qquad [i = 1, 2, \cdots, h]$$

の右辺に整数が現われることを考慮して, われわれの結論が得られる.

$$(r_1, 0, \cdots, 0) \qquad [0<r_1 \leqq 1]$$

---

1) 一つの閉じた道 γ に対する積分関数 F の値 $F(\gamma)$ を計算するとき, γ の代りに, γ の十分近くを通る折れ線 π をとることができる(56 ページ); このとき π は頂点を通過することがなく, 辺に出会うところではつねに, これを横切ると仮定しよう. このような任意の横断点において, π が三角形 $\triangle_1$ から三角形 $\triangle_2$ に移るとすれば, $F(\gamma)=F(\pi)$ はすべての横断点に関する和 $\Sigma x_{\triangle_1\triangle_2}[F]$ に等しい.

の形をしたすべての(有限個)の格子点のうち，r_1 が最小値をとるものを

$$\gamma_1 \sim (r_1^{(1)},\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

としよう；さらに

$$(r_1, r_2, 0, \cdots, 0) \qquad [0 \leqq r_1 < r_1^{(1)}\,;\, 0 < r_2 \leqq 1]$$

の形をした有限個の格子点——これがともかく存在することは確かである——のうち，

$$\gamma_2 \sim (r_1^{(2)}, r_2^{(2)}, 0, \cdots, 0)$$

はできるだけ小さい $r_2^{(2)}$ をもつものとする；すべての格子点

$$(r_1, r_2, r_3, 0, \cdots, 0) \qquad [0 \leqq r_1 < r_1^{(1)}, 0 \leqq r_2 < r_2^{(2)}\,;\, 0 < r_3 \leqq 1]$$

のうち，

$$\gamma_3 \sim (r_1^{(3)}, r_2^{(3)}, r_3^{(3)}, 0, \cdots, 0)$$

は最小の $r_3^{(3)}$ をとるものとする；以下同様．このとき閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots, \gamma_h$ は求めるとおりの基底をつくる[1]．実際，$\gamma \sim (r_1, r_2, \cdots, r_h)$ が G に属する任意の点であるとき，

$$\gamma - (n_h\gamma_h + n_{h-1}\gamma_{h-1} + \cdots + n_1\gamma_1) \sim (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_h)$$
$$0 \leqq \bar{r}_i < r_i^{(i)} \qquad (i = h, h-1, \cdots, 1)$$

となるような整数 $n_h, n_{h-1}, \cdots, n_1$ をこの順序に決めてゆくことができる．ところがこのとき $\gamma_h, \gamma_{h-1}, \cdots, \gamma_1$ の意味から，順に

$$\bar{r}_h = 0, \quad \bar{r}_{h-1} = 0, \quad \cdots, \quad \bar{r}_1 = 0$$

となり，最後の結果はさきに述べたとおりの

$$\gamma \sim n_h\gamma_h + \cdots + n_2\gamma_2 + n_1\gamma_1$$

である．

これからは，基底 $\{\gamma_i\}$ によってすべての閉曲線が位相合同の意味で線形同次に，しかも整数によって表わされるときに限り，これらの $\{\gamma_i\}$ を現実の基底として許すことにしよう．このような現実の基底の一つから他の一つへの移行は，整係数の線形変換によって媒介され，その行列式は $=\pm 1$ でなければならない．

連結度 h をもつ閉じた面 $\mathfrak{F}$ の真上には，つぎのような非分岐無境界な(正

1) この論法は Minkowski によって“部分格子に関する数格子の調整”と名づけられている．Diophantische Approximationen (Leipzig 1907), 90–95 ページを参照.

規)被覆面 $\hat{\mathfrak{F}}$ が存在する：すなわち $\mathfrak{F}$ の上に閉じた射影曲線をもつ $\hat{\mathfrak{F}}$ 上の曲線が閉じるのは，その射影曲線が ~ 0 であるときであり，またそのときに限る．$\mathfrak{F}$ 上の積分関数を $\hat{\mathfrak{F}}$ 上の積分関数とみなすならば，それらはすべて0に位相合同となる；それゆえ私は $\hat{\mathfrak{F}}$ を**積分関数の被覆面**と名づける．$\gamma_1, \cdots, \gamma_h$ は $\mathfrak{F}$ 上の閉じた道に対する一つの基底であるとし，$\hat{\mathfrak{F}}$ 上の任意の点 $\hat{\mathfrak{p}}$ から出発して，$\mathfrak{F}$ における射影線が閉じて $\sim\gamma_i$ となるような $\hat{\mathfrak{F}}$ 上の道をたどるとき，最後に到達する点を一般に $\hat{\mathfrak{p}}S_i$ で表わすことにすれば，S_i は $\hat{\mathfrak{F}}$ からそれ自身への被覆変換になっており，これらが集まって生成するのは，上記のような被覆変換の全体から成る群——これは可換(アーベル)群である——：

$$S_1^{n_1}S_2^{n_2}\cdots S_h^{n_h}$$

[$n_1, n_2, \cdots, n_h$ は互いに関係なくすべての整数値を動く] である．

閉じた双側の面の場合に，第II章で述べる予定の関数論的応用のために，リーマンは閉じた道に対する特殊な基底，いわゆる標準切断をつくった[1]．つぎのような考え方の上にこの構成法を基礎づけてみよう．

単連結な多面体の上ではすべての積分関数が ~ 0 であり，したがってその連結度 h は $=0$ である．この定理については逆も成り立つ．たとえば，開いた多面体 $\mathfrak{P}$ に対して $h=0$ と仮定し，これが単連結でないとすれば，$\mathfrak{P}$ を分けない(n 個の辺から成る)横断線がひかれる．これによって $\mathfrak{P}$ は別の多面体 $\mathfrak{P}'$ に変わり，これに関する各個数は

$$d' = d, \quad k' = k-n, \quad e' = e-(n-1)$$

によって計算されるから，$\mathfrak{P}'$ に対しては $h'=-1$ が得られることになり，これは起こりえない．

三角形分割 ζ の定められている閉じた双側の面 $\mathfrak{F}_\zeta$ の上に，$\mathfrak{F}$ を分けない多角形 π が与えられ，これは ζ の辺から成るとしよう．このとき π は面を分けないのであるから，π とただ一点で交差し，そのほかには π と共通点をもたない多角形 π' が $\mathfrak{F}_\zeta$ の上に描かれる．ζ の部分分割 ζ^* を適当にとって，π' もまた辺ばかりから成るようにすれば，$\pi+\pi'$ は一つの閉じた点集合をつくり，これは $\mathfrak{F}$ を分けないばかりでなく，これ自身を含むおよそすべての領域を分け

1) Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, 全集，第2版，129–130ページ．

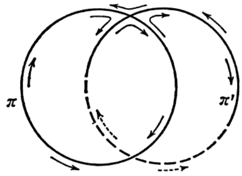


図 21. 回帰切断線対.

ない. なぜなら, $\pi+\pi'$ の上に辺をもつ ζ^* の三角形は[1], ただ一つの閉じた三角形の鎖をつくり, この鎖において番号の続いた二つの三角形はいずれも $\pi+\pi'$ に属さない辺を共有するように並べられるからである(この際, 一般には鎖のなかに同じ三角形が何回も現われることがありうる). この配列をつくるにあたっては, π も π' も二つの隔てられた岸をもたないということが利用される. $\pi+\pi'$ を**回帰切断線対**(Rückkehrschnittpaar)と名づけよう.

$\mathfrak{F}_\zeta$ の上に q 個の互いに出会わない回帰切断線対

$$\pi_1+\pi_1', \quad \pi_2+\pi_2', \quad \cdots, \quad \pi_q+\pi_q'$$

があって, これらが $\mathfrak{F}_\zeta$ を分けないときには, (これら q 個の回帰切断線対の上にない)任意の点 $\mathfrak{p}_0$ を単純な折れ線 $\sigma_1, \cdots, \sigma_q$ によって回帰切断線対の交差点と結ぶことができる. われわれはこれらの σ を選ぶとき, どの二つも $\mathfrak{p}_0$ 以外では交わらず, また σ_i は i 番目の回帰切断線対と交差点を共有するけれど

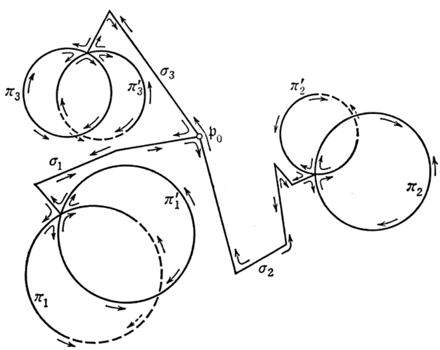


図 22. 標準切断.

1) (訳注) $\pi+\pi'$ の上に頂点だけをもつ三角形もあわせて考える.

も，それ以外の点を共有せず，しかも残りの回帰切断線対のいずれにも出会わないようにすることができる：このとき q 個の回帰切断線対から成る“ひき馬の一団”が得られ，これは“手綱” σ によって点 $\mathfrak{p}_0$ につながれている．この切断線系の全体

$$\sum = \sum_{i=1}^{q} (\pi_i + \pi_i' + \sigma_i)$$

が辺ばかりから成るように ζ の部分分割 ζ^* をつくれば，これは $\mathfrak{F}$ ばかりでなく，$\sum$ をすっかり含むどの領域をも分けないことがわかる(図 22)．この切断線系の辺に沿って，三角形のあいだの結びつきを切り離すことにより，この閉じた多面体から一つの開いた多面体 $\mathfrak{P}'$ を得る．この操作によって三角形の個数 d はもとのままである；個数 $k-e$ は $2q-1$ だけ下がる．それゆえ(h によって $\mathfrak{F}$ の連結度を表わせば)

$$h-(2q-1) \geqq 1 \quad すなわち \quad 2q \leqq h$$

でなければならない．それでもなお $2q<h$ であれば，$\mathfrak{P}'$ は単連結でない．このときは $\mathfrak{P}'$ を分けない横断線 υ を $\mathfrak{P}'$ のなかに描き，υ に属する一辺の両岸で向かい合う二点を，υ と出会わない多角形 π_{q+1}' により $\mathfrak{P}'$ のなかで結ぼう．υ の第一辺の始まりと最終辺の終りにおいて，小さな一片を υ からとり除き，こうして切り縮められた横断線 υ^- の始点と終点を $\mathfrak{P}'$ のなかの折れ線 τ で結ぶ；この際 τ を切断線系 $\sum$ の十分近くにとれば，これが π_{q+1}' と出会うこともありえない．このとき $\upsilon^-+\tau=\pi_{q+1}$ は $\mathfrak{P}'$ を分けない閉多角形である；π_{q+1}' が π_{q+1} に属する一つの線分の両岸を，$\mathfrak{P}'$ のなかで π_{q+1} を越えずに結んでいるからである．$\pi_{q+1}+\pi_{q+1}'$ はもう一つの回帰切断線対であって，これは以前のものと共通点を一つももたず，それらと合わせてもなおいままでどおり $\mathfrak{F}$ を分けない．

したがって数 h が $>2q$ のときは，$\geqq 2q+2$ でなければならない．このことは，双側の閉じた面に対する h が偶数でしかありえないことを示す．$h=2p$ とおけば，p 個の回帰切断線対 $\pi+\pi'$ から成る“ひき馬の一団”があって，これらは手綱 σ によって面上の点 $\mathfrak{p}_0$ に結びつけられる．p を $\mathfrak{F}$ の**示性数**という．(必要ならばもとの三角形分割 ζ から部分分割 ζ^* に移ることによって)これらの線 π, π', σ はすべて辺から成ると仮定することができる；これらによって $\mathfrak{F}$ に

から単連結な多面体 $\mathfrak{F}_*$ への**標準切断**が与えられる.

$\mathfrak{F}$ の各三角形には同調の原理に従って一つの表示が与えられているとする. この三角形分割において向きのつけられた辺 $\overrightarrow{12}$ に沿って隣り合う二つの基本三角形のうち, 表示(12 *)をもつものは**左**, もう一つは**右**の三角形と呼ぶことにしよう. 手綱 σ には $\mathfrak{p}_0$ から交差点に至る向きを付け, π, π' には, π' が線 π を右から左へ(それゆえ π は π' を左から右へ)横切るような回転の向きを付ける.

$\mathfrak{F}$ 上の積分関数 F を考えよう. $\mathfrak{F}_*$ の上では, 一つの点関数 f を与え, $\mathfrak{F}_*$ のなかを通る各曲線 γ に対して, その始点と終点を $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ とするとき,

$$F(\gamma) = f(\mathfrak{p}_2) - f(\mathfrak{p}_1)$$

とすることができる. $\triangle', \triangle''$ は標準切断線系に属する辺 κ を共有する二つの三角形であるとしよう($\triangle'$ は考えている切断線の左岸に, $\triangle''$ は右岸にあるとする); このとき $\triangle'+\triangle''$ のなかで一つの関数 f_0 を与え, $\triangle'+\triangle''$ のなかを通る各曲線 $\gamma=(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$ に対して,

$$F(\gamma) = f_0(\mathfrak{p}_2) - f_0(\mathfrak{p}_1)$$

とすることができる. このとき

$$\triangle' \text{ のなかでは } f=f_0+c', \quad \triangle'' \text{ のなかでは } f=f_0+c'',$$

ただし c', c'' は定数でなければならない. 私は $c''-c'$ を κ における F の**飛躍** (Sprung) と名づける. この標準切断線系の上にあって, どの交差点とも一致しない頂点をとり, そのまわりに集まる三角形の星を考えれば, 切断線 π, π', σ のどれか一つに属するすべての辺に対して, F の飛躍は同じ値をとることがわかる. その値を

$$\pi_i \text{ に対しては } =a_i, \quad \pi_i' \text{ に対しては } =a_i', \quad \sigma_i \text{ に対しては } =c_i$$

としよう. i 番目の回帰切断線対の交差点のまわりに集まる三角形の星を考えれば, $c_i=0$ が得られる. それゆえ手綱 σ_i はとり除くことができる. 数 a_i, a_i' は切断線 π_i, π_i' におけるこの積分関数の**周期**と呼ばれる.

γ が任意の閉曲線であるとき, $F(\gamma)$ の計算のためには, γ の代りに γ の十分近くを通る多角形をとることができる; またこの多角形は, 三角形分割の頂点ではないところで, 回帰切断線対を有限回横切ると仮定しよう. 上記の多角形 π_i を左から右へ横切る回数から, 右から左へ横切る回数を引いた差を $+n_i$ と

し，π_i' に対して同じような意味をもつ値を $-n_i'$ とすれば，明らかに

$$F(\gamma)=\sum_{i=1}^{p} n_i a_i-\sum_{i=1}^{p} n_i' a_i';$$

他方では

$$a_i=F(\pi_i') \qquad -a_i'=F(\pi_i)$$

である．それゆえ π_i, π_i' の全体は閉じた道に対する現実の基底をつくる．

示性数 p は，Möbius と Jordan[1)]が証明したように，閉じた双側の面におけるただ一つの位置解析的不変量である．すなわち，二つの閉じた双側の面が位置解析の意味において同値であるならば同じ p をもたなければならないという定理に対して，その逆が成り立つ．この本で試みた位置解析的考察と厳密性の点で対等な形に Jordan の証明を書き改めるためには，大きな労力を必要としない；しかしそのことには立ち入らないでおこう．閉じたリーマン面の示性数がこの面の上の関数論に対してどれほど決定的な意味をもつかは，つぎの章の関数論的な諸定理から十分にわかるであろう．

三次元ユークリッド空間内の比較的簡単な性質をもつ閉じた双側の曲面のなかから，その示性数 p が与えられた値をとるものを挙げるのは容易である；たとえば p 個のハンドルをつけた球面は示性数 p をもつ．

1) Möbius, "Theorie der elementaren Verwandtschaft" (1863)，全集，第 II 巻，435–471 ページ；C. Jordan, Journal de mathématiques, Ser. 2, 11 (1866), 105 ページ．さらに：W. Dyck, Math. Ann., 32 (1888), 457 ページ．

第II章. リーマン面上の関数.

§12. ディリクレ積分.[1)]

$\mathfrak{E}$ は直交座標 xy をもつユークリッド平面のなかの，有限な範囲にすっかりはいっている閉じた点集合であるとしよう．$\mathfrak{E}$ の面積を定めるためには，この平面のなかに辺の長さ ε の正方形から成る網を描く；これは x 軸に対する平行線

$$y = m\varepsilon \qquad (m \text{ は任意の整数})$$

と，y 軸に対する平行線

$$x = n\varepsilon \qquad (n \text{ は任意の整数})$$

によってつくられる．この網の正方形のうち，$\mathfrak{E}$ の内点ばかりから成るものの個数を i_ε，他方ともかく $\mathfrak{E}$ と点を共有するものの個数を $a_\varepsilon(>i_\varepsilon)$ とすれば，極限値

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 i_\varepsilon = I, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 a_\varepsilon = A$$

が存在する[2)]．$I=A$ となるとき，この数を $\mathfrak{E}$ の**面積**という．$\mathfrak{E}$ の点のうちには，それの任意の近傍のなかに $\mathfrak{E}$ に属さない点が見いだされるものもある；このような点の全体は $\mathfrak{E}$ の**境界**をつくる．$\mathfrak{E}$ に一定の面積が与えられるために，$\mathfrak{E}$ の境界が面積 0 をもつということは，明らかに必要十分である．

平面のなかの連続的に微分可能な曲線，まして解析的な，または区分的に解析的な曲線は面積 0 をもつ．実際，長さ l をもつ連続的に微分可能な曲線 γ は，それぞれ長さ $\dfrac{l}{n+1}$ をもつ $n+1$ 個の部分弧に分割される．このとき辺の長さ $\varepsilon=\dfrac{l}{n}$ の正方形の網を使えば，このような一つの部分弧と共通点をもつ網の正方形は，明らかにたかだか四つしかありえない；それゆえ γ の点を含む網の正

1) (訳注) 以下の数節に関しては，H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. Jour., 7 (1940), 414–444 ページ，K. Kodaira, Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory), Ann. of Math., 50 (1949), 587–665 ページを参照．また本章全般に関して，岩澤健吉，代数函数論，岩波，増補版，1973 を参照．

2) C. Jordan, Cours d'analyse, 第2版，第1巻，28 ページ．

方形は全部で多くとも $4(n+1)$ 個しかないであろう：すなわち

$$a_\varepsilon \cdot \varepsilon^2 \leqq 4(n+1)\frac{l^2}{n^2},$$

これから $\lim_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = 0$ という結論の正しいことが出て来る.[1]

閉じた点集合 $\mathfrak{E}$ について，今後はいちいち断わらなくても，これが面積 J をもつと仮定する；$\mathfrak{E}$ が一つの領域 $\mathfrak{G}$ にすっかり含まれ，$\mathfrak{G}$ では連続関数 f が定義されているとき，積分 $\iint_{\mathfrak{E}} f\,dxdy$ は明確な意味をもつ．その近似値を計算するには，$\mathfrak{E}$ に含まれる ε 網の各正方形の面積 ε^2 に，この正方形の中心における f の値を掛け，一つ一つの正方形から得られるこれらの寄与をすべて加えればよい．こうして求められた数は，ε を 0 に近づけるとき，積分の値に収束する．この際，$\mathfrak{E}$ の内部にすっかりはいっている網の正方形についてだけ加えるか，またはそのほかにも，$\mathfrak{E}$ の境界に出会う正方形をいくつか，あるいは全部同時に考慮するかは，どうでもよいことである．$\mathfrak{E}$ が有限個の閉じた点集合 $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \cdots, \mathfrak{E}_n$ に分割され，これらが決まった面積をもつとき（そして $\mathfrak{E}_i$ は内点に関する限りいずれも全く共通点をもたず，各 $\mathfrak{E}_i$ は $\mathfrak{E}$ の部分集合であるが，他方また $\mathfrak{E}$ の各点は少なくとも一つの $\mathfrak{E}_i$ に属するとき），定義からただちにつぎの加法法則が得られる：

$$\iint_{\mathfrak{E}} f\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\mathfrak{E}_i} f\,dxdy.$$

$$x' = x'(xy), \qquad y' = y'(xy) \tag{14}$$

によって $\mathfrak{G}$ が $x'y'$ 平面の領域 $\mathfrak{G}'$ の上へ両側から一意領域連続に写像され，しかも微分商

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x} & \dfrac{\partial x'}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial y'}{\partial x} & \dfrac{\partial y'}{\partial y} \end{matrix} \right\|$$

が xy の連続関数であって，これの行列式 d がいたるところ $\neq 0$ であるとすれば，変換公式[2]

1) この証明は，C. Jordan による（Cours d'analyse, 第2版，第1巻，107 ページ）.
2)（訳注） 以下 $d>0$ とする.

$$\iint_{\mathfrak{G}} f\,dxdy = \iint_{\mathfrak{G}'} \frac{f}{d}dx'dy'$$

が成り立つ. ただし $\mathfrak{G}'$ は $\mathfrak{G}$ の像であり, 右辺の積分のなかの $\dfrac{f}{d}$ は変換の式により x', y' の関数として表わされているものとする.

u が $\mathfrak{G}$ において連続的に微分可能な関数であるとき,

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{G}}(u) = \iint_{\mathfrak{G}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

を(歴史的にはあまり正しくないが, ともかく)**ディィリクレ積分**と呼ぶのが習慣である. これは等角写像に関して不変である. 実際: 写像(14)が等角ならば(このとき $d \neq 0$ は, 写像が一対一であるという仮定から出て来る), コーシー–リーマンの微分方程式により

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$d = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2,$$

したがって

$$\iint_{\mathfrak{G}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = \iint_{\mathfrak{G}'}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2\right]dx'dy'.$$

この不変法則により, 連続的に微分可能な関数のディィリクレ積分を平面のなかだけではなく, 任意のリーマン面上でつくることが可能になる.

そのため $\mathfrak{F}$ は閉じたリーマン面であり, u はその上の連続的に微分可能な関数であるとする; このとき, $\mathfrak{F}$ の上における u のディィリクレ積分 $\mathbf{D}(u)$ のもとに何を理解すればよいかを明らかにしよう. $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{F}$ 上の一点, z は $\mathfrak{p}$ に属する一つの局所一意化変数であり, これによって $\mathfrak{p}$ の或る近傍が z 平面の点 $z=0$ を含む領域に写像されるとき, この領域のなかにすっかり含まれる円板 $|z| \leqq a$ は $\mathfrak{F}$ 上の或る点集合の像であるが, この点集合を $\mathfrak{p}$ のまわりの z **円板**と呼ぶ. $|z|=a$ となるような点は, この円板の周をつくる. 各点 $\mathfrak{p}$ に一つの局所一意化変数 z と, 一つの z 円板 K を任意に対応させるとき, これらの K のなかから有限個の K_l ($l=1, 2, \cdots, n$; 局所一意化変数 z_l をもつ点 $\mathfrak{p}_l$ に対応するもの)を選び出し, この面の点はいずれも n 個の円 K_l のうちの一つの内部に属するようにできる(ハイネ-ボレルの定理). (任意の閉じた面に対するハイネ-ボ

レルの定理を得るには，その上に三角形分割の列をつくる；そしてこの列に属する各分割は一つ前のものの部分分割であり，さきへ進むにつれていくらでも細かくなるようにすればよい.） K_l の周 κ_l は閉じた解析曲線であるから，それらは互いに有限個の点でしか交わらない．それゆえ閉集合 $\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_n$ は $\mathfrak{F}$ 上に有限個の領域を定めるに過ぎない；これらの一つ一つにその境界を付け加えて閉集合にしてから，これらを $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_r$ によって表わそう．どの $\mathfrak{S}_h$ の境界も有限個の解析曲線弧から成る．各 $\mathfrak{S}_h$ は或る円板 K_l のなかにすっかりはいる；そしてこのとき z_l は $\mathfrak{S}_h$ **に属する一意化変数**，すなわち $\mathfrak{S}_h$ を含む一つの領域の各点において正則であり，しかもこの領域から z_l 平面のなかへの両側から一意領域連続な等角写像を定める関数である．各 $\mathfrak{S}_h$ に対して，$\mathfrak{S}_h$ に属する一つの一意化変数 $z_h=x_h+iy_h$ が或る決まった方法で対応させられていると考え，それから

$$\mathbf{D}(u)=\sum_{h=1}^{r}\int\!\!\int_{\mathfrak{S}_h}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y_h}\right)^2\right]dx_h dy_h$$

をつくろう．ただし，$\mathfrak{S}_h$ における u は $x_h y_h$ の関数として表わされていると考え，z_h によって平面上に描かれるリーマン面上の一切片 $\mathfrak{S}_h$ の像をも，同じ $\mathfrak{S}_h$ によって表わしている．こうして求められた数 $\mathbf{D}(u)$ は，不変法則により，各切片 $\mathfrak{S}_h$ でどの一意化変数 $z_h=x_h+iy_h$ が用いられたかによって変わらない．ところがまたその値は，一意化可能な切片 $\mathfrak{S}_h$ への分割がどのようになされたかということにも依存しない．実際，何か或る別の点 $\mathfrak{p}'_1, \cdots, \mathfrak{p}'_{n'}$，これらに属する一意化変数 $z'_{l'}$，さらに周 $\kappa'_{l'}$ をもつ $z'_{l'}$ 円板 $K'_{l'}$ を選んで，これらの $K'_{l'}$ が面をすっかり覆うようにしてみよう！ $\kappa'_1, \cdots, \kappa'_{n'}$ は $\mathfrak{F}$ を切片 $\mathfrak{S}'_1, \cdots, \mathfrak{S}'_{r'}$ に分割し，各 $\mathfrak{S}'_{h'}$ に対して $z'_{h'}=x'_{h'}+iy'_{h'}$ が一意化変数になっているとする．われわれは新たに

$$\mathbf{D}'(u)=\sum_{h'=1}^{r'}\int\!\!\int_{\mathfrak{S}'_{h'}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'_{h'}}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'_{h'}}\right)^2\right]dx'_{h'}dy'_{h'}$$

をつくる．このとき，私がいいたいことは

$$\mathbf{D}(u)=\mathbf{D}'(u)$$

である．証明のために，切断線 $\kappa_l, \kappa'_{l'}$ を同時に採用しよう．これらの線は互いに有限個の点でしか交わらないから，面を有限個の切片

$$\mathfrak{S}_{hj}=\mathfrak{S}'_{h'j'}\begin{bmatrix}j=1,2,\cdots,i_h;\ h=1,2,\cdots,r\\ j'=1,2,\cdots,i'_{h'};\ h'=1,2,\cdots,r'\end{bmatrix}$$

に分割する．第一の表わし方において，各 $\mathfrak{S}_{hj}$ は $\mathfrak{S}_h$ の部分であり，第二の方では，各 $\mathfrak{S}'_{h'j'}$ が $\mathfrak{S}'_{h'}$ の部分である．加法法則により

$$\mathbf{D}(u)=\sum_h\sum_j\iint_{\mathfrak{S}_{hj}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y_h}\right)^2\right]dx_hdy_h,$$

$$\mathbf{D}'(u)=\sum_{h'}\sum_{j'}\iint_{\mathfrak{S}'_{h'j'}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'_{h'}}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'_{h'}}\right)^2\right]dx'_{h'}dy'_{h'},$$

不変法則により

$$\iint_{\mathfrak{S}_{hj}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y_h}\right)^2\right]dx_hdy_h=\iint_{\mathfrak{S}'_{h'j'}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'_{h'}}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'_{h'}}\right)^2\right]dx'_{h'}dy'_{h'};$$

したがって

$$\mathbf{D}(u)=\mathbf{D}'(u).$$

それゆえ，$\mathfrak{F}$ 上で連続的に微分可能な各関数 u に対して，一つの数 $\mathbf{D}(u)$ が存在する．これはつぎの性質をもつ:

1. c が定数であるとき，u を $u+c$ に置き換えてもこの値は変わらない；これは決して負にならず，これが 0 になるのは，u がこの面の全体にわたって定数であるときに限る．

2. $\mathfrak{p}$ はこの面上の任意の点，z は $\mathfrak{p}$ に属する局所一意化変数，$K:|z|\leqq a$ は一つの z 円板であるとすれば，

$$\mathbf{D}(u)=\iint_K\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+R(u)$$

と書かれる；ここで $R(u)\geqq 0$ であり，また K のなかにないすべての点で u と一致し，$\mathfrak{F}$ 上で連続的に微分可能な任意の関数を考え，u をこの関数に置き換えても $R(u)$ は変わらない．

3. $\mathbf{D}(u)$ は二次の性格をもつ．このことはつぎのようにいい表わされる: u, v が $\mathfrak{F}$ 上で連続的に微分可能な任意の二つの関数であり，λ,μ が任意の定数を意味するとき，

$$\mathbf{D}(\lambda u+\mu v)=\lambda^2\mathbf{D}(u)+2\lambda\mu\mathbf{D}(uv)+\mu^2\mathbf{D}(v)$$

は λ, μ の二次形式である.[1)]

閉じていないリーマン面の上でも，連続的に微分可能な関数 u についてディリクレ積分がつくられるが，このときには一般に積分が値 ∞ をとることもありうる. 閉じていないリーマン面の場合には，可算個の“円板”K_l の周 κ_l によってこれを分割し，どの点もたかだか有限個の，しかし少なくとも一個の円板 K_l に属するようにしなければならないであろう.

§13. ポアッソン積分について.

われわれの研究の補助手段として，円板に対するポテンシャル論の第一境界値問題といわれるものを，ポアッソン積分によって解くことが必要となる. 複素 z 平面の単位円周の上に一つの連続な実関数が与えられているとき，点 $\zeta=e^{i\varphi}$ におけるその値を $u(\varphi)$ と書き表わすことにすれば，等式

$$2\pi f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}u(\varphi)\,d\varphi$$

により，$|z|<1$ において正則-解析的な関数 $f(z)$ が与えられ，その実部は境界において値 $u(\varphi)$ をとる；すなわち，単位円の内部では u を $=f(z)$ の実部，また単位円周上の値 $\zeta=e^{i\varphi}$ に対しては $=u(\varphi)$ とおくとき，この関数 u は閉円板 $|z|\leqq 1$ の全域で連続な関数となる[2)]. 極座標 $z=re^{i\varphi}$ を使えば,

$$2\pi u=\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\vartheta)}u(\vartheta)\,d\vartheta \tag{15}$$

と書くことができる. u のほかになおもう一つ単位円の内部で正則なポテンシャル関数 $\bar{u}$ があり，いま明らかにした意味で，円の境界において値 $u(\varphi)$ をとるということは決してない. 実際そのときには，$\bar{u}-u$ はこの閉円板で連続な関数であり，内部では正則なポテンシャル関数として，どの点においても最大値あるいは最小値をとることができず，しかも境界では $=0$ である. したがっ

1)(訳注)　$\mathbf{D}(uv)=\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$

2)　H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, 第 II 巻，186–198 ページ. この証明はほとんどすべての関数論の教科書に見いだされる.

て($|z|\leqq 1$ における)u の最大値も最小値も $=0$，すなわち $\bar{u}\equiv u$ でなければならない.

ポアッソン積分(15)によって，つぎの重要な収束定理が得られる：$u_1, u_2, u_3, \cdots$ はポテンシャル関数の列であって，これらはすべて $|z|<1$ において正則であり，また q を任意の正数 <1 とするとき，$|z|\leqq q$ においては一様に或る極限関数 u に収束するならば，極限関数 u もまた同様に $|z|<1$ において正則なポテンシャル関数である．実際，与えられた条件の下に，$r<q$ に対してはポアッソン積分によって

$$2\pi u_n(re^{i\varphi}) = \int^{2\pi} \frac{q^2-r^2}{q^2+r^2-2qr\cos(\varphi-\vartheta)} u_n(qe^{i\vartheta})\,d\vartheta$$

でなければならない．極限に移れば

$$2\pi u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} \frac{q^2-r^2}{q^2+r^2-2qr\cos(\varphi-\vartheta)} u(qe^{i\vartheta})\,d\vartheta$$

が与えられ，この右辺には $r<q$ において正則なポテンシャル関数が現われる．さらに，q_1 が正数 <1 であるとき，私は $q>q_1$ を <1 となるように選ぶ；そうすれば，半径が <1 である任意の同心円板($|z|\leqq q_1$)において，u_n が一様に u に収束するばかりでなく，u_n の任意の階数の導関数もまたすべて対応する u の導関数に一様に収束することがわかる.

ポテンシャル論とディリクレ積分との関係は，つぎの定理から出て来る：

v は単位円板 K: $|z|\leqq 1$ の上で連続な，その内部では連続的に微分可能な関数で，有限なディリクレ積分

$$\mathbf{D}(v) = \iint_K \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dxdy \qquad (z = x+iy)$$

をもち，u は $|z|<1$ において正則なポテンシャル関数で，$|z|=1$ の上におけるその境界値は v の境界値と一致するならば，

$$\mathbf{D}(u) \leqq \mathbf{D}(v) \tag{16}$$

である.

この場合，ここに現われるディリクレ積分は"広義の"積分，すなわち積分

$$\mathbf{D}_q(v) = \iint_{|z|\leqq q} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dxdy \qquad (q<1)$$

の $\lim q=1$ における極限の意味に解釈しなければならない．われわれは一般に，$0\leqq q_1<q_2\leqq 1$ のとき，

$$\mathbf{D}_{q_1}{}^{q_2}(v)=\iint_{q_1\leqq|z|\leqq q_2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

という記法を使おう．

普通(16)の証明はつぎのようになされる：$w=v-u$ とおく；部分積分法(グリーンの公式)により，

$$\mathbf{D}(wu)=\int^{2\pi}\left(w\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=1}d\varphi-\iint_K w\varDelta u dxdy \qquad \left(\varDelta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

が得られ，K の内部では $\varDelta u=0$，境界では $w=0$ であるから，

$$\mathbf{D}(wu)=0;$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(v)=\mathbf{D}(u+w)&=\mathbf{D}(u)+2\mathbf{D}(wu)+\mathbf{D}(w)\\&=\mathbf{D}(u)+\mathbf{D}(w)\geqq\mathbf{D}(u).\end{aligned}$$

この証明を厳密なものにしようとすれば，まずすべてのディリクレ積分を $|z|\leqq q(<1)$ の範囲に制限し，それからのち q を 1 に収束させなければならない．このとき問題になるのは，

$$\mathbf{D}_q(wu)=q\int_0^{2\pi}\left(w\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=q}d\varphi$$

が $\lim q=1$ のとき 0 に近づくことの検証である．ここで，q が 1 に近づくとき $w(qe^{i\varphi})$ が φ に関して一様に 0 に収束することは確かにわかるけれども，$\dfrac{\partial u}{\partial r}$ が単位円内の全域において有界にとどまるとはいえない；われわれが主張しうるのは，$\lim r=1$ のとき $(1-r)\dfrac{\partial u}{\partial r}$ が φ に関して一様に 0 に収束することだけであり，これでは $\lim\limits_{q\to 1}\mathbf{D}_q(wu)=0$ と結論するためにもちろん不十分である．この困難を念頭におくことにより，Hadamard と Zaremba[1] によってもたらされたつぎの証明の価値を正しく評価することがはじめてできるであろう．

境界値 $v(e^{i\varphi})$ を簡単に $v(\varphi)$ と書くことにしよう．ポアッソン積分(15)を r のベキに展開すれば，

1) Hadamard, Sur le principe de Dirichlet, Bulletin de la Société mathématique de France, **34** (1906), 135–139 ページ. Zaremba, Sur le principe du minimum, Bulletin de l'Académie de sciences de Cracovie, Juli 1909, 206 ページ以下.

$$u=\frac{a_0}{2}+a_1r\cos\varphi+a_2r^2\cos 2\varphi+\cdots$$
$$+b_1r\sin\varphi+b_2r^2\sin 2\varphi+\cdots$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}v(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}v(\varphi)\sin n\varphi d\varphi$$

を得る．この展開はポテンシャル関数の領域において，解析関数論におけるベキ級数に相当する．事実，$r^n\cos n\varphi$，$r^n\sin n\varphi$ は z^n の実部と虚部にほかならない．ポテンシャル関数

$$P_n=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}r^n\cos n\varphi,\qquad Q_n=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}r^n\sin n\varphi$$

はつぎの性質をもつ：

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\text{例外なく } \mathbf{D}_q(P_n, Q_m)=0,\\ n=m \text{ のときを除いて } \mathbf{D}_q(P_n, P_m)=0, \mathbf{D}_q(Q_n, Q_m)=0,\\ \mathbf{D}_q(P_n)=\mathbf{D}_q(Q_n)=q^{2n},\end{cases}$$

また，一般に

$$\iint\limits_{|z|\leqq q} uvdxdy=\mathbf{J}_q(uv)$$

とおけば，つぎの性質をもつ：

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases}\text{例外なく } \mathbf{J}_q(P_n, Q_m)=0,\\ n=m \text{ のときを除いて } \mathbf{J}_q(P_n, P_m)=\mathbf{J}_q(Q_n, Q_m)=0,\\ \mathbf{J}_q(P_n)=\mathbf{J}_q(Q_n)=\dfrac{q^{2n+2}}{2n(n+1)}.\end{cases}$$

われわれは u の展開をつぎのように書くことができる：

$$u-\frac{a_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}[A_nP_n(xy)+B_nQ_n(xy)], \tag{17}$$

ここで $A_n=a_n\sqrt{\pi n}$，$B_n=b_n\sqrt{\pi n}$ は定数であるが，これらは二重積分として

$$A_n=\mathbf{D}(v, P_n),\qquad B_n=\mathbf{D}(v, Q_n) \tag{18}$$

の形に書き表わされる．なぜなら，グリーンの公式により，たとえば

$$\mathbf{D}_q(v, P_n)=q\int_0^{2\pi}\left(v\frac{\partial P_n}{\partial r}\right)_{r=q}d\varphi=\sqrt{\frac{n}{\pi}}q^n\int_0^{2\pi}v(qe^{i\varphi})\cos n\varphi d\varphi$$

であるが，極限への移行 $\lim q=1$ によって，これから実際

$$\mathbf{D}(v, P_n) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^{2\pi} v(\varphi)\cos n\varphi d\varphi = \sqrt{n\pi}\cdot a_n = A_n$$

が出て来るからである.

級数(17)は $|z| \leqq q\ (<1)$ において一様にまた絶対に収束し，その導関数もすべて同様である．それゆえ(17)から $\mathbf{D}_q(u)$ を計算するとき，項ごとに積をとり，そのあとで項ごとに積分することが許される．そうすれば公式(Ⅰ)から

$$\mathbf{D}_q(u) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n}(A_n^2 + B_n^2) \tag{19}$$

が得られる．他方，同じ公式と式(18)に基づいて，

$$\mathbf{D}\left(v - \sum_{\nu=1}^{n}[A_\nu P_\nu + B_\nu Q_\nu]\right) = \mathbf{D}(v) - \sum_{\nu=1}^{n}(A_\nu^2 + B_\nu^2)$$

が出て来る．したがって級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)$$

は，どれほどさきまでとっても，つねに $\leqq \mathbf{D}(v)$ の範囲にある；その結果としてこれは収束する．このことと等式(19)を結びつければ，

$$\mathbf{D}_q(u) \leqq \mathbf{D}(v)$$

が得られ，極限への移行 $\lim q = 0$ によって $\mathbf{D}(u)$ の存在とともに，

$$\mathbf{D}(u) \leqq \mathbf{D}(v) \tag{20}$$

であることが出て来る.

それゆえ，境界値において v と一致するすべての関数のうちで，ポテンシャル関数がディリクレ積分に対して最小値を与える．$v-u=w$ とおけば，この定理により $\lambda=1$ ばかりでなく，λ のすべての実の定数値に対して

$$\mathbf{D}(u) \leqq \mathbf{D}(u+\lambda w),$$

あるいはこれを書きなおして，

$$2\lambda\mathbf{D}(uw) + \lambda^2\mathbf{D}(w) \geqq 0$$

でなければならない．その結果，等式

$$\mathbf{D}(uw) = 0$$

が成り立ち，これを

$$\mathbf{D}(v) = \mathbf{D}(u) + \mathbf{D}(w) = \mathbf{D}(u) + \mathbf{D}(v-u)$$

という形にすれば，不等式(20)に含まれる内容よりもさらに精密な情報が得ら

れる．特に，(20)において等号が成り立つのは，$v-u=$定数 のとき，すなわち——この差は境界で消えるから——v が u と同じであるときに限るということもわかる．

(19)から極限への移行 $\lim q=1$ によって

$$\mathbf{D}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n{}^2+B_n{}^2) \tag{21}$$

が得られる．なぜなら，一方では

$$\mathbf{D}_q(u)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}(A_n{}^2+B_n{}^2),\quad \text{したがって}\quad \mathbf{D}(u)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}(A_n{}^2+B_n{}^2)$$

であるが，他方では

$$\mathbf{D}_q(u)\geqq\sum_{\nu=1}^{n}(A_\nu{}^2+B_\nu{}^2)q^{2\nu}$$

により，すべての n に対して成り立つ不等式

$$\mathbf{D}(u)\geqq\sum_{\nu=1}^{n}(A_\nu{}^2+B_\nu{}^2)$$

が与えられるからである．

$a_1=\dfrac{A_1}{\sqrt{\pi}}$, $b_1=\dfrac{B_1}{\sqrt{\pi}}$ は $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ の原点における値である．それゆえ，(21)の右辺にある第一項だけを残せば，

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]_{z=0}\leqq\frac{1}{\pi}\mathbf{D}(u) \tag{22}$$

を得る．単位円板の代りに，中心 $z\left(\dfrac{1}{2}<|z|=r<1\right)$ と半径 $1-r$ をもつ円板 κ_z をとり，上の不等式をこれに適用すれば，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2&\leqq\frac{1}{\pi(1-r)^2}\int\int_{K_z}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\\ &\leqq\frac{1}{\pi(1-r)^2}\mathbf{D}_{2r-1}{}^1(u)^{1)}\end{aligned} \tag{23}$$

が得られる．なぜなら，円板 κ_z は円環領域 $2r-1\leqq|z|\leqq1$ のなかにすっかり含まれるからである．$\lim\limits_{r\to1}\mathbf{D}_{2r-1}{}^1(u)=0$ であるから，この不等式のなかには，単位円板の境界における導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ の挙動に関する一つの情報が含まれて

---

1) (訳注)　原文では $\mathbf{D}_{2r-1}(u)$ と書かれているが誤植であろう．

いる.

(21)が公式(Ⅰ)から(19)を通る道をたどって得られたように，公式系(Ⅱ)を利用すれば，

$$\mathbf{J}\left(u-\frac{a_0}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n{}^2+B_n{}^2}{2n(n+1)}$$

を得る．これを(21)と結びつけると，不等式

$$\mathbf{J}\left(u-\frac{a_0}{2}\right)\leqq\frac{1}{4}\mathbf{D}(u) \tag{24}$$

が得られる．この不等式は，一つの興味深い初等的な解析学の問題と密接な関係にある．一つの領域 $\mathfrak{G}$ における二変数 xy の関数 v を定数によってどの程度まで近似することができるかを問題にすれば，微分法の第一平均値の定理からこれについて確かにいえることは，私が近似定数として定点(x_0y_0)における v の値をとるとき，

$$|v(xy)-v(x_0y_0)|\leqq\underset{\mathfrak{G}}{\mathrm{Max}}\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}\times\text{距離}(xy\,;\,x_0y_0)$$

が得られるということである．ここでは差の絶対値 $|v-v_0|$ の最大値が誤差とみなされ，その大きさは $\mathrm{Max}\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$ によって本質的に定められるものであることが示されている．しかしながら最小二乗法の場合のように，二乗積分 $\int\int_{\mathfrak{G}}(v-v_0)^2dxdy$ によって誤差を判定するならば，定数 v_0 を適当に選ぶことによって到達しうる近似は，

$$\int\int_{\mathfrak{G}}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

の値によって決定されると期待することができよう．領域 $\mathfrak{G}$ が単位円板で，v がポテンシャル関数である場合には，上の不等式によってこの予想が確かめられている．

さきに利用した記法を使って

$$\mathbf{J}\left(v-\frac{a_0}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}\mathbf{D}(v) \tag{25}$$

を一般的に証明し，それによって v に関する上記の仮定を取り除くことにしよう．

$\frac{a_0}{2}$ は一般に中心における v の値ではなく，円の境界における v の平均値で

ある: すなわち

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\varphi)\,d\varphi.$$

われわれはシュワルツの不等式

$$\left(\int_0^1 fg\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 f^2dx\cdot\int_0^1 g^2dx$$

を利用するが，これはまた

$$\sqrt{\int_0^1(f\pm g)^2dx}\leqq\sqrt{\int_0^1 f^2dx}+\sqrt{\int_0^1 g^2dx}$$

と書くこともできる [$f(x), g(x)$ は区間 $0\leqq x\leqq 1$ において連続な任意の二つの関数である]. この不等式は，$\lambda\mu$ の二次形式

$$\int_0^1(\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x))^2dx = A\lambda^2+2B\lambda\mu+\Gamma\mu^2$$

が負になりえないこと，したがってその判別式が

$$A\Gamma-B^2\geqq 0$$

でなければならないことから得られる.

$w=v-u$ のように，閉じた単位円板において連続であり，境界では消え，内部では連続的に微分可能な関数に対して，シュワルツの不等式により，

$$[w(r_2e^{i\varphi})-w(r_1e^{i\varphi})]^2=\left(\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial w(re^{i\varphi})}{\partial r}dr\right)^2$$

$$\leqq\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 r\,dr\cdot\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\qquad(0<r_1<r_2<1)$$

を得る. この不等式を φ について積分し，それから r_2 を 1 に収束させ，

$$\mathbf{D}_{r_1}{}^{r_2}(w)=\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 r+\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2\frac{1}{r}\right]d\varphi dr$$

を使えば，

$$\int_0^{2\pi}[w(re^{i\varphi})]^2d\varphi\leqq\log\frac{1}{r}\cdot\mathbf{D}_r{}^1(w)\tag{26}$$

という関係が得られる. この不等式を使えば，なお一つの重要な結果がただちに導かれる. まず右辺の $\mathbf{D}_r{}^1(w)$ の代りにもっと大きな $\mathbf{D}(w)$ をとり，rdr を掛け，r について 0 から 1 まで積分する. このとき，

$$\int_0^1 r\log\frac{1}{r}dr=\frac{1}{4}$$

であるから，

$$\mathbf{J}(w)\leqq\frac{1}{4}\mathbf{D}(w) \tag{27}$$

が得られる．われわれは(27)を(24)と結びつけよう．

$$\mathbf{J}\left(v-\frac{a_0}{2}\right)\leqq 2\left[\mathbf{J}\left(u-\frac{a_0}{2}\right)+\mathbf{J}(w)\right]$$

——不等式 $(\alpha+\beta)^2\leqq 2[\alpha^2+\beta^2]$ による——であり，したがって(24)と(27)から

$$\leqq\frac{1}{2}[\mathbf{D}(u)+\mathbf{D}(w)]=\frac{1}{2}\mathbf{D}(v).$$

これで(25)は証明された．(25)において，v がポテンシャル関数であるか，または境界で消えるときには，因数 $\frac{1}{2}$ はもっと小さい $\frac{1}{4}$ に置き換えられることにもう一度注意しよう．

単位円板を内部に含む一つの領域において v が連続的に微分可能であるとき，単位円内で v を u に置き換えることによって，ディリクレ積分の値は下げられる．しかしながら，われわれが考えている応用においては，連続的に微分可能な関数しか用いることができないのに，単位円の外部では v と一致し，内部では u と一致する関数 $\bar{v}$ は単位円周を越えるところで一般にこの性質をもたないから，そこでは $\bar{v}$ の関数値の動きを適当に“滑らかにし”，しかもその際 $\bar{v}$ のディリクレ積分の値の変化は，われわれの思いどおりにいくらでも小さくすることが必要となる．そのために，つぎのような関数 $\tilde{v}$ を考える：$\tilde{v}$ は連続的に微分可能であり，単位円の外部で v と一致し，単位円におけるそのディリクレ積分 $\mathbf{D}(\tilde{v})$ は $\mathbf{D}(\tilde{v})=\mathbf{D}(u)$ と，要求されたとおりわずかしかちがわない；このような $\tilde{v}$ の存在することを示そう．

私は q を $>\frac{1}{2}$ かつ <1 に選び，$\chi(r)=\left(\frac{r-q}{1-q}\right)^2$ を使って関数[1)]

$$\tilde{v}=\begin{cases} u & (|z|\leqq q \text{ のとき}) \\ u+\chi(r)(v-u) & (q\leqq |z|=r\leqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

1) S. Zaremba, Krakauer Berichte, Juli 1909, 246 ページ以下による．

をつくる. $\chi(r)$ は $r=q$ で2位に消えるから，この関数 $\tilde{v}$ はその第1階微分商とともに，円 $|z|=q$ を越えるとき連続的に変わる. 単位円板の境界に近づけば，$\tilde{v}-v$ とその二つの第1階微分商は一様に0に収束する. それゆえ単位円の外部で $\tilde{v}$ を v と一致させれば，$\tilde{v}$ は単位円板の境界上でも連続かつ連続的に微分可能である. 実際，たとえば

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{v}-v)=[\chi(r)-1]\frac{\partial(v-u)}{\partial x}+(v-u)\frac{d\chi}{dr}\frac{x}{r}\qquad(q<r<1\text{ のとき})$$

である. $\chi(r)-1$ は $r=1$ において1位に零となるから，不等式(23)により，右辺に現われる第一の被加項は，単位円の内部から周に近づくとき，一様に0に収束することがわかる; 第二の被加項もそうなることは，ほとんどいうまでもない.

つぎに単位円板上のディリクレ積分

$$\mathbf{D}(\tilde{v}-u)=\mathbf{D}_q{}^1[\chi(r)(v-u)]$$

を評価しよう.

$$\frac{\partial}{\partial x}[\chi(r)(v-u)]=\chi(r)\frac{\partial(v-u)}{\partial x}+(v-u)\frac{2(r-q)}{(1-q)^2}\frac{x}{r}$$

であるから，この積分に対しては，

$$\iint\limits_{q\leqq|z|\leqq 1}\chi^2(r)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\frac{4}{(1-q)^4}\int_0^{2\pi}\int_q^1 w^2(r-q)^2 r\,drd\varphi$$

の2倍より大きくない値を得る. $\chi^2\leqq 1$ により，この式の第一の被加項は

$$\leqq \mathbf{D}_q{}^1(w)$$

であり，また(26)により

$$\int_0^{2\pi}w^2 d\varphi\leqq\left(\frac{1}{r}-1\right)\mathbf{D}_q{}^1(w)\qquad(q<r<1)$$

であるから，第二の被加項は

$$\leqq\frac{4}{(1-q)^4}\mathbf{D}_q{}^1(w)\cdot\int_q^1(1-r)(r-q)^2dr=\frac{1}{3}\mathbf{D}_q{}^1(w)$$

である. それゆえ，全体として

$$\mathbf{D}(\tilde{v})-\mathbf{D}(u)=\mathbf{D}(\tilde{v}-u)\leqq\frac{8}{3}\mathbf{D}_q{}^1(w)$$

となり，この値は q を適当に選ぶことによって，いくらでも小さくすることができる[1].

§14. 存在定理を証明するための補題. 基本微分の構成.

あらかじめ与えられた閉リーマン面 $\mathfrak{F}$ の上の解析関数を構成する代りに，まずそのような関数の実部，すなわちこの面の上で調和な実関数だけを求めよう[2]. ところで，この面の上でいたるところ正則なポテンシャル関数は(定数を除けば)存在しない. それゆえわれわれはこの調和関数に対して或る一点における特異性を，ただしあらゆる特異性のうちで最も簡単なものを許すことにしよう：すなわちこの関数はそこで，1位の極をもつ解析関数の実部のような挙動をとるとする. それゆえ，われわれはつぎの存在定理を証明することから始めよう：

O は $\mathfrak{F}$ 上の任意の点で，局所一意化変数 $z_0=x_0+iy_0$ をもつとすれば，O と異なるすべての点において正則な $\mathfrak{F}$ 上のポテンシャル関数 U をつくり，O の近傍においてはこれと $\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$ との差が，O においても正則な或るポテンシャル関数に等しくすることができる.

明らかに U はこの性質により加法的定数を除いて一意的に決定される.

$\mathfrak{F}$ は空間のなかに実際にある面ではなく，第 I 章で導入したとおりの抽象的な意味におけるリーマン面であるとしてよいのであるが，それでもなお U を縮まない流体の $\mathfrak{F}$ における一つの定常な渦のない流れのポテンシャルとみなすことが許されるであろう；この流れはまた，一点 O を除けばいたるとこ

1)(訳注)　あとの議論のために，この結果をもう少し拡張しておくと都合がよい：$v, u, \bar{v}, \breve{v}$ とは別に，単位円板を含む領域で連続的に微分可能な関数 φ が与えられているとき，$\mathbf{D}(\breve{v}+\varphi)$ と $\mathbf{D}(\bar{v}+\varphi)$ との差をいくらでも小さくすることができる. 証明：まずシュワルツの不等式から，$\mathbf{D}(f,g)^2 \leqq \mathbf{D}(f)\cdot\mathbf{D}(g)$ が容易に導かれる. これを使って，$|\mathbf{D}(\breve{v}+\varphi)-\mathbf{D}(\bar{v}+\varphi)|=|\mathbf{D}(\breve{v})-\mathbf{D}(\bar{v})+2\mathbf{D}(\breve{v}-\bar{v},\varphi)| \leqq \mathbf{D}(\breve{v})-\mathbf{D}(\bar{v})+2|\mathbf{D}(\breve{v}-\bar{v},\varphi)| \leqq \mathbf{D}(\breve{v})-\mathbf{D}(\bar{v})+2\sqrt{\mathbf{D}(\breve{v}-\bar{v})}\cdot\sqrt{\mathbf{D}(\varphi)}$. 前ページの最後の評価式から，この値はいくらでも小さくなる. $\mathbf{D}$ を $\mathbf{J}$ に代えても同様である.

2)　(第3版の序文より)　この手段が有効であることは，このあいだに完成された高次元への拡張において最も明確に示された：複素解析的ではなく，実調和の線形微分形式がその理論の出発点において構成され，小平邦彦の大論文(91 ページの訳注を参照)は，明らかに私の旧著の原型を思わせる.

ろで，わき出しをもたない；しかし点 O においてはモーメント 2π の“双極子”があり，その方向は正の x_0 軸と一致する．この流体力学的解釈から U の存在について結論を下すのは，確かにいくらかの危険を伴うことである[1]．

U からディリクレ積分がつくられるとすれば，われわれはこれを流体の運動エネルギーというべきであろう．しかし残念ながらこの積分は点 O における U の挙動によって無限大になる．それゆえわれわれはつぎのように処理する．O のまわりに一つの z_0 円板 $K_0: |z_0| \leqq a_0$ を描き，そのなかで関数

$$\phi = \frac{x_0}{{x_0}^2 + {y_0}^2} + \frac{x_0}{{a_0}^2}$$

をつくろう．この関数は，K_0 の周において法線方向の変化率が 0 になるという性質をもつ．事実，極座標 $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ を使えば，

$$\phi = \frac{\cos\varphi_0}{r_0} + \frac{r_0 \cos\varphi_0}{{a_0}^2},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r_0} = -\frac{\cos\varphi_0}{{r_0}^2} + \frac{\cos\varphi_0}{{a_0}^2}, \qquad r_0 = a_0 \text{ のとき } \frac{\partial\phi}{\partial r_0} = 0$$

である．いま，

$$u = \begin{cases} U & (K_0 \text{ の内部を除く } \mathfrak{F} \text{ の各点において}) \\ U - \phi & (K_0 \text{ の内部の点において}) \end{cases}$$

を考えよう．この関数は K_0 の周 κ_0 に沿って飛躍をもつけれども，そこ以外では連続的に微分可能である．また，K_0 の外部における u の値の挙動は，連続的に微分可能な(それどころか正則なポテンシャル)関数として，κ_0 を越え，内部の方へなおいくらか接続される(U)；全く同じように，K_0 の内部における u は，連続的に微分可能な(それどころか正則なポテンシャル)関数($U-\phi$)として，κ_0 を越え，外部へいくらか接続される．それゆえ，さきに説明した方法によってディリクレ積分 $\mathbf{D}(u)$ をつくることができる；この場合，$\mathfrak{F}$ をいくつかの切片 $\mathfrak{E}_h$ に分割する円周 κ_l の一つとして，いつでも円 κ_0 を採用すればよい．

κ_0 に沿って u と同じ飛躍をもち，そこ以外では連続的に微分可能なすべての関数 v のうちで，u はディリクレ積分 $\mathbf{D}(v)$ にその最小値を与える．ここで

1) このような，またこれに似た物理的直観によって，さきに述べた 1882 年の Klein の論文における表現はささえられている；そこに描かれたきわめて示唆に富む流れの図を参照．

u と比較するためにとられた関数 v を，なおいくらか正確に特徴づけることにしよう．そのため私は a_0 よりもいくらか大きな半径 b_0 をもつ z_0 円板 K_0^*：$|z_0|\leqq b_0$ を O のまわりに描く．私は $\mathfrak{F}-K_0$ を "孔のあいた" 面，K_0 を "孔"，K_0^* を "覆い" と名づけ，孔のあいた面に覆いが侵入する円環領域 $a_0<|z_0|<b_0$ を "閉じ合わせの環" と呼ぶ．この比較に加わることが関数 v に対して許されるのは，孔のあいた面において v が連続的に微分可能であり，また覆い全体で連続的に微分可能な関数 v^* があって，孔において v は v^* と一致し，閉じ合わせの環においては $v=v^*+\phi$ という関係にある場合とする．v が任意の比較関数に対する記号であるとき，いつでも v^* はここに定められた性格をもち，覆いのなかで連続的に微分可能な関数を意味するとしよう．二つの比較関数の差は $\mathfrak{F}$ 全体の上で連続的に微分可能である．

ここで U あるいは u の存在証明を導くために，すべての比較関数 v のうちから，ディリクレ積分 $\mathbf{D}(v)$ に最小値を与える関数 u をとり出すという最小値問題をたててみよう．トムソン-ディリクレの原理は，このような最小値関数 u の存在することを主張する[1)]．この原理に基づいてリーマンは彼の存在証明を与えたのであるが，彼の補題がわれわれのものと完全に一致しているわけではない[2)]．ワイヤストラスの批判は，ディリクレの原理のなかにひそむとみられる自明の推論が錯覚に過ぎないことを示した[3)]．そこで人々は別の方法によってリーマンの存在定理を確証しようと試みた；そしてまず Schwarz と C. Neumann が，特にいわゆる交互処理法を用いて，この証明に対する輝かしい成功をおさめたのである[4)]．しかしながら，そののちディリクレの原理はヒルベルトによって厳密に証明された[5)]．彼の証明に関連して，他の著者たちによ

---

1) 1847 年以来，W. Thomson (Lord Kelvin) によっていろいろな仕事に応用されている．"ディリクレの原理" という名称は Riemann に由来する；彼はこの推論法を Dirichlet の講義から知ったのである．

2) この補題の基礎形式としてここに採用したものは，著者により (この本のもとになった講義のほか) Göttinger Mathematischen Gesellschaft の 1912 年 1 月 16 日の学会において報告された．

3) Über das sog. Dirichletsche Prinzip, (1870)，ワイヤストラス全集，第 2 巻，49–54 ページ．

4) H. A. Schwarz, Berliner Berichte 1870 (Ges. Abhandlungen II, 133–171 ページ)．C. Neumann, Sächsische Berichte 1870；同じ著者，Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, 第 2 版，Leibzig 1884, 388–471 ページ．

5) Hilbert, "Über das Dirichletsche Prinzip," Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1901, これは Math. Ann., **59**, 161–186 ページに印刷されている；"Zur Theorie der konformen Abbildung," Göttinger Nachrichten,

る一連の，きわめて数多くの仕事がある；これらの仕事によって証明の基本思想が変わったわけではないけれども，個々の点では多くの簡易化がなされた[1]. これらの研究からのち，ディリクレの原理は再び解析学における最も有力な手段の一つになった.

われわれの問題における上記の補題が一つの最小値問題として正しいことをいうには，まず最小値関数 u が存在する場合に(このとき u 自身も比較が許される関数の一つである)，これが求める性質をもつということ，すなわち u が孔のあいた面の各点において，付属する u^* が覆いの各内点において，正則-調和であることが示されなければならない.

1. $\mathfrak{p}$ は孔のあいた面の一点，z はこれに属する局所一意化変数，K は $\mathfrak{p}$ のまわりの z 円板で，孔のあいた面にすっかりはいるものであるとき，u が K のなかで調和でないとすれば，私は K の境界で u と一致するポテンシャル関数 $\bar{u}$ によって K 内の u を置き換えることができる. このときこの関数に対しては K 上のディリクレ積分が $\mathbf{D}_K(\bar{u})<\mathbf{D}_K(u)$ となる. §13の終わりに述べた平滑化の処理により，K の境界を越えて連続的に微分可能であり，K の内部を除いては u と一致し，また K 上のディリクレ積分については，私が必要とする程度に少ししか $\mathbf{D}_K(\bar{u})$ からずれないような関数 $\tilde{u}$ を得る. それゆえ特に，$\mathbf{D}_K(\tilde{u})$ もなお $<\mathbf{D}_K(u)$ とすることができる. $\tilde{u}$ は比較関数の一つであり，これに対しては $\mathfrak{F}$ 全体の上の積分 $\mathbf{D}(\tilde{u})$ が u のそれよりも小さい値をとる. この矛盾は，u が K 内で正則なポテンシャル関数でなければならないことを示す.

2. $\mathfrak{p}$ は覆いの内点であり，K は z_0 平面においてすっかり覆いに含まれる $\mathfrak{p}$ のまわりの円板であるとしよう. u^* が $\mathfrak{p}$ において調和でないとすれば，u^* の代りに，覆い全体の内部で連続的に微分可能な関数 $\widetilde{u^*}$ をとり，これが K の外部では u^* と一致し，またこれに対して $\mathbf{D}_K(\widetilde{u^*})<\mathbf{D}_K(u^*)$ とすることができる. このときつぎのような比較関数 $\tilde{u}$ がただ一つ存在する：すなわち K の内部を

1909, 314–323 ページ.

1) 特に，Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22–24 (1906–07) に掲載された諸論文：B. Levi, Sul principio di Dirichlet; Fubini, Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazione alle derivate parziali di ordini pari; Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet; Krakauer Berichten, 1909年7月にあるS. Zarembaの仕事, Sur le principe du minimum および Math. Ann. の 72 (1912) にある R. Courant の仕事, Über die Methode des Dirichletschen Prinzips を挙げておく.

除いたところで $=u$ であり，付属する $(\tilde{u})^*$ が覆いのなかで $\widetilde{u^*}$ と一致する.

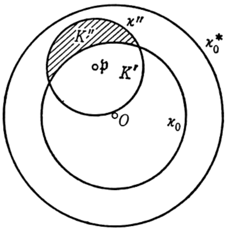


図 23.

この関数に対しては——いまから示すように——面全体における積分 $\mathbf{D}(\tilde{u})$ が $<\mathbf{D}(u)$ であり，これによって u^* が $\mathfrak{p}$ において正則-調和関数でないという仮定が否定される．証明にあたっては一般性を保つために，K が孔の周 κ_0 と交わると仮定しよう．このとき(図 23) K は κ_0 によって二つの部分 K', K'' に分けられるが，そのうち K' が K_0 に含まれるとする．証明しようとする等式

$$\mathbf{D}(u)-\mathbf{D}(\tilde{u}) = \mathbf{D}_K(u^*)-\mathbf{D}_K(\widetilde{u^*})\ (>0)$$

はつぎのものと同じである：

$$\mathbf{D}_{K''}(u^*+\phi)-\mathbf{D}_{K''}(\widetilde{u^*}+\phi) = \mathbf{D}_{K''}(u^*)-\mathbf{D}_{K''}(\widetilde{u^*}). \tag{28}$$

ϕ は K'' のなかばかりでなく，K'' の境界を越えてもなお正則なポテンシャル関数であるから，たとえば

$$\mathbf{D}_{K''}(u^*+\phi) = \mathbf{D}_{K''}(u^*)+\mathbf{D}_{K''}(\phi)-2\int u^*\frac{\partial\phi}{\partial n}ds$$

が成り立つ；ただし最後の積分は K'' の境界に沿ってとるものとする(ds はこの境界の弧の要素を意味し，境界の法線 n は K'' の内部に向かう)．ところで $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}$ は κ_0 上で 0 に等しいから，上記の積分は K_0 の外部にある K の周の部分弧 κ'' に沿ってとるだけでよい．したがってわれわれのいいたいことは結局

$$\int_{\kappa''}(\widetilde{u^*}-u^*)\frac{\partial\phi}{\partial n}ds = 0$$

になる．この形にすればそれは自明である；なぜなら，K の周に沿っては $\widetilde{u^*}=u^*$ であるからである．これからわかるように，われわれの補題が成り立つためには，特異性を構成する要素 $\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$ に $\dfrac{x_0}{{a_0}^2}$ という項をつけ加えることが

決定的に重要である；これの働きによって孔の境界における ϕ の法線変化率が 0 に等しくなったのである.

われわれは閉じていないリーマン面に対してもディリクレの原理が成り立つことを証明するから，このような面の上でも u, u^* および U をつくることができる. このときには，比較される関数 v に対する条件をなお一そう制限して，$\mathbf{D}(v)$ が有限でなければならないという要求をつけ加えることにする. 閉じていない面の上では，点 O における特異性だけでポテンシャル関数 U を完全に特徴づけることがもはやできなくなる. しかしそれを記述するにあたって，O における固有の特異性を与えるばかりでなく，なおつぎの事実をつけ加えると，U は加法的な定数を除いて一意的に決定される：O の(どれほど小さくてもよいがともかく)一つの近傍の各点で $=0$ となり，有限なディリクレ積分をもつ連続的に微分可能な関数 w に対しては，いつでも

$$\mathbf{D}(U, w) = 0$$

が成り立つ. 実際，O を中心として K_0 のなかにはいる十分小さな z_0 円板 $K_0^{**}: |z_0| \leqq c_0$ を描き，K_0^{**} のなかでは関数 w が $=0$ となるようにすれば，まず任意の定数 λ に対して成り立つ不等式

$$\mathbf{D}(u) \leqq \mathbf{D}(u+\lambda w)$$

から関係 $\mathbf{D}(u, w)=0$ が出る. ところが差

$$\mathbf{D}(U, w)-\mathbf{D}(u, w)$$

は

$$\iint\limits_{c_0 \leqq |z_0| \leqq a_0} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\frac{\partial w}{\partial x_0} + \frac{\partial\phi}{\partial y_0}\frac{\partial w}{\partial y_0} \right) dx_0 dy_0$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[r_0 w \frac{\partial\phi}{\partial r_0} \right]_{r_0=c_0}^{r_0=a_0} d\varphi_0$$

である. K_0 の周上では $\dfrac{\partial\phi}{\partial r_0}=0$, K_0^{**} の周上では $w=0$；したがって

$$\mathbf{D}(U, w) = \mathbf{D}(u, w) = 0.$$

さらになお本節では，ディリクレの原理による方法の拡張について論ずるが，これらの拡張は閉じた面だけについて行なうことにしよう.

$\dfrac{\cos\varphi_0}{r_0}$ の代りに，O における特異性として私は

$$\frac{\sin\varphi_0}{r_0}=\frac{y_0}{x_0{}^2+y_0{}^2}$$

あるいはもっと一般に

$$\frac{\cos n\varphi_0}{r_0{}^n},\qquad \frac{\sin n\varphi_0}{r_0{}^n}$$

(n 位の極; n は正の整数)を与えることもできる. このときは ϕ として式

$$\phi=\frac{\overset{\cos}{\sin}n\varphi_0}{r_0{}^n}+r_0{}^n\cdot\frac{\overset{\cos}{\sin}n\varphi_0}{a_0{}^{2n}}$$

をつくらなければならない; どの場合にも $\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial r_0}\right)_{r_0=a_0}=0$ である. こうして得られるポテンシャル関数はそれぞれ一つの微分 $d\tau$ をつくり出す(62 ページを参照). これは O 以外のどこでも正則であり, O においては

$$-\frac{ndz_0}{z_0{}^{n+1}}\quad あるいは\quad -i\frac{ndz_0}{z_0{}^{n+1}}$$

のように無限大となる; 一方, 任意の閉曲線に沿う積分 $\int d\tau$ の実部[1]はいつも 0 である. こうして得られる微分は**第 2 種**である; すなわち, これらはどこにも 0 と異なる留数をもたない. 0 と異なる留数をもつような微分は**第 3 種微分**と呼ばれる; また或る微分がどこにも極をもたず, まして 0 と異なる留数はもちろんもたないとき, これは**第 1 種**であるという.

1 と 2 は K_0 の内部の二点であるとし, $1'$ と $2'$ は z_0 平面における逆半径の方法を用いて得られた κ_0 に関するそれらの鏡像[2]であるとしよう. $r_1, r_2; r_1', r_2'$ は点 $1, 2; 1', 2'$ から z_0 平面上の動点に至る動径ベクトルの長さ, $\varphi_1, \varphi_2; \varphi_1', \varphi_2'$ は対応する(2π の整数倍を除いて定まるに過ぎない)偏角(正の x_0 軸の向きに対してつくる角)であるとする. 1 と 2 以外では正則であるが, 1 では $\log r_1$ のように, 2 では $-\log r_2$ のように無限大になるポテンシャル関数を求めたいときには,

$$\phi=(\log r_1-\log r_2)+(\log r_1'-\log r_2')$$

をとる. κ_0 における ϕ の法線方向の変化率は 0 である. 閉じ合わせの環を十分狭くとって, 点 $1', 2'$ が覆いのなかに入らないようにする. こうしてできる

1) 複素量 $c=a+ib$ の実部, 虚部を表わすのに, 記号 $a=\Re c$, $b=\Im c$ を使うことにしよう.
2) 1 と 2 はどちらも K_0 の中心にはないようにこの円をとることができる.

ポテンシャル U からつくられる微分 $d\omega_{12}$ は，1と2にそれぞれ1位の極をもち，留数はそれぞれ $+1$ と -1 である．$\mathfrak{p},\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{F}$ 上の任意の二点であるときには，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ を結ぶ一つの曲線に沿い，点 $\mathfrak{p}=1,2,3,\cdots,\mathfrak{q}=n$ を十分細かくとってあいだに入れれば，われわれの方法によって

$$d\omega_{12},\ \ d\omega_{23},\ \ \cdots,\ \ d\omega_{n-1,n}$$

をつくることができる．このとき

$$d\omega_{\mathfrak{pq}}=d\omega_{12}+d\omega_{23}+\cdots+d\omega_{n-1,n}$$

は $\mathfrak{p},\mathfrak{q}$ だけにそれぞれ1位の極をもつ微分であり，留数はそれぞれ $+1$ および -1 である．$\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\cdots,\mathfrak{p}_n;\mathfrak{p}_0$ はこの面上の任意の $n+1$ 個の異なる点であり，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ は和が0になるような任意の複素数であるとき，

$$\sum_{l=1}^{n} A_l d\omega_{\mathfrak{p}_l\mathfrak{p}_0}$$

は点 $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\cdots,\mathfrak{p}_n$ においてそれぞれ1位の極をもつ微分であって，留数はそれぞれ $A_1,A_2,\cdots,A_n$ であるが，これら以外のすべての点で($\mathfrak{p}_0$ においても)正則に振舞う．極を除いて正則な微分の留数は，それらの和が0に等しくなければならないという条件の下に，あらかじめ任意に与えられることがわかる．

円板 K_0 と，このなかにあって中心をはずれた二点1,2に戻ろう．

$$\phi=(\varphi_1-\varphi_2)-(\varphi_1'-\varphi_2')$$

は閉じ合わせの環において(さらにその境界をいくらか越えたところでも)一意正則なポテンシャル関数である．それゆえディリクレの原理により，孔のあいた面における正則なポテンシャル関数 u と，覆いにおける正則なポテンシャル関数 u^* が存在し，閉じ合わせの環では互いに $u=u^*+\phi$ という関係にある．これに属する U は一意でなく，1と2において無限位の分岐点(Windungspunkt)をもつ．しかし K_0 の内部で1から2に至る任意の連続な曲線 σ_0 に沿って面に切れ目を入れれば，U は切れ目のはいった面において一意である．このことは，覆いのなかにあって σ_0 と交わらない任意の閉曲線に関し，z_0 平面において点1と2が同じ“位数”をもつ(64ページを参照)という事情からただちにわかる．切れ目のない面において U は多意であるにもかかわらず，ここで一意の微分 $d\omega_{12}'$ をつくり出し，この微分は1と2においてだけ1位の極をもち，留数は $\mp i$ である．三角形分割された面 $\mathfrak{F}$ の上で線 σ_0 が基本線分であ

るとすれば，この線分と出会わないすべての閉曲線 γ に対して $\Re\int_\gamma d\omega_{12}'=0$ となるが，σ_0 をただ一つの点で右から左へ横切る多角形 β に対しては

$$\Re\int_\beta d\omega_{12}' = 2\pi$$

となる．α が $\mathfrak{F}$ 上の閉曲線であるとき，α 上に点 $1, 2, 3, \cdots, n$ を十分密にとって α を部分曲線 $1\,2, 2\,3, \cdots, n\,1$ に分割し，これらの一つ一つは K_0 のような円板の内部にすっかり含まれるようにすることができる．このとき

$$dw_\alpha = \frac{1}{2\pi}(d\omega_{12}'+d\omega_{23}'+\cdots+d\omega_{n1}')$$

をつくれば，いたるところで例外なく正則な微分 dw_α を得る；これは α と出会わないすべての閉曲線 γ に対して，$\int_\gamma dw_\alpha$ の実部が $=0$ であるという性質をもつ．しかし α が多角形であったとし，β は α をただ一つの点で右から左へ横切る多角形であるとすれば，

$$\Re\int_\beta dw_\alpha = 1$$

となる．

いくつかの微分 dw_α の線形結合によって任意の第1種微分をつくり出すことができるという事実を証明するには，標準切断が役立つ．実際，

$$\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \cdots,\ \alpha_{2p-1}+\alpha_{2p}$$

を一つの標準切断の回帰切断線対とし，簡単のため $dw_{\alpha_h}=dw_h$ と書けば，

$$\Re\int_{\alpha_{2l}} dw_{2l-1} = 1, \quad \Re\int_{\alpha_{2l-1}} dw_{2l} = -1 \qquad [l = 1, \cdots, p]$$

が成り立ち，$\Re\int_{\alpha_h} dw_i$ の形をしたこれら以外の式はすべて $=0$ である．いま $\int_{\alpha_h} dw$ [1] の実部が c_h に等しいとすれば，

$$(29) \qquad \Re\int[dw-(c_2dw_1-c_1dw_2)-(c_4dw_3-c_3dw_4)-\cdots]$$

はどのような閉曲線に沿って積分しても $=0$ である；なぜなら，この“積分関数”は $2p$ 個の曲線 α_h に対して消え，α_h は閉じた道の基底をつくっているからである．それゆえ始点を固定し，終点を変数とみなして積分すれば，(29)は

1) (訳注) dw は任意の第1種微分である．

この終点の関数として一意であり，しかも正則-調和である；しかしそのようなものは定数以外に存在しないから，恒等式

$$dw = (c_2dw_1 - c_1dw_2) + (c_4dw_3 - c_3dw_4) + \cdots$$

が得られる；すなわち，$2p$ 個の微分 dw_h から，すべての第1種微分は実の定係数による線形結合としてただ一通りにつくられる：dw_h は第1種微分の一つの“実”基底を構成する．——第1種微分の一つの実基底からもう一つの実基底への移行は，任意の実係数および0と異なる行列式をもつ線形変換によってもたらされる．一つの実基底に属する $2p$ 個の微分 dw_h からいくつかを適当に選べば(これを，たとえば $dw_1, \cdots, dw_q$ とする)，これらのあいだには任意の複素定係数による線形関係はないけれども，この基底に属する $q+1$ 個の微分のあいだにはいつもそのような関係があるとすることができる．このとき

$$(30) \qquad dw_1,\ \cdots,\ dw_q;\ idw_1,\ \cdots,\ idw_q$$

は実の意味で線形独立であるから，$2q \leqq 2p$ でなければならない．ところで，この基底の各微分，したがって一般に第1種微分はいずれも $dw_1, \cdots, dw_q$ の複素係数による線形結合として，それゆえ微分(30)の実係数による線形結合としてつくられるから，$2q \geqq 2p$，したがって $q=p$ でなければならない．一つの実基底に属する微分のなかから，このようにして p 個の微分から成る“複素”基底 $dw_1, \cdots, dw_p$ をとり出すことができる．第1種微分 dw はいずれも複素定数 $C_1, \cdots, C_p$ を用いて

$$dw = C_1dw_1 + \cdots + C_pdw_p$$

という形の表現をただ一つだけ許す．

任意の微分 dv の点 $\mathfrak{p}_1$ におけるベキ級数展開を，この点に属する局所一意化変数 z_1 により

$$dv = \left(\frac{A_{-m}}{z_1{}^m} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z_1} + A_0 + A_1z_1 + \cdots\right)dz_1$$

と書き表わすとき，

$$\left(\frac{A_{-m}}{z_1{}^m} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z_1}\right)dz_1$$

を dv の点 $\mathfrak{p}_1$ における**主要部**と呼ぶ．閉じたリーマン面の上で一つの微分 dv につき，極およびその点における主要部を任意に——ただし留数の和は $=0$ と

なるように——あらかじめ与え，さらに $2p$ 個の線形独立な道 γ に対して $\int_\gamma dv$ の実部を与えておけば，これだけの要求を満たす微分 dv がただ一つだけ存在する；それはディリクレの原理を使って上記のように構成されたいくつかの**基本微分**から，加法的な結合によって得られる．

§15. ディリクレの原理の証明.[1]

関数 v に対する比較条件は前節に述べたとおり決められているとし，その他の記号もまたすべて前節のものを流用しよう．まずはじめに，(閉じていない面の場合でも)ともかく比較関数が存在すること，たとえば K_0 の点を除けばいたるところで $=0$ となる比較関数が存在することに注意しなければならない．d はすべての比較関数に対するディリクレ積分 $\mathbf{D}(v)$ の下限であるとしよう；このときつねに $\mathbf{D}(v)\geqq d$ であるが，ε が任意に小さい正の数であるときはいつでも，$\mathbf{D}(v)<d+\varepsilon$ となるような比較関数 v が存在するであろう．v が一つの比較関数であれば，a を任意の実定数とするとき，$v+a$ もまたつねに，ディリクレ積分に対してやはり v と同じ値を与える比較関数である．それゆえ，円板 K_0 の周における v^* の境界積分が

$$\int_0^{2\pi} v^*{}_{r_0=a_0}\cdot d\varphi_0=0$$

でなければならないという要求によって，比較条件をさらに強くすることができる．各比較関数 v に或る数 $\vartheta(v)$ が対応させられているとき，

$$\lim_v \vartheta(v)=\vartheta_0$$

のような極限に関する等式は，どんな正の数 ε に対しても，正の数 δ を適当に定めれば，$\mathbf{D}(v)<d+\delta$ となるすべての比較関数 v に対して，差 $|\vartheta(v)-\vartheta_0|$ が $<\varepsilon$ になるという意味に解釈しよう．この意味で $\lim\vartheta(v)$ が存在するため

1) この証明は主として109ページに引用したZarembaの仕事に基づいて行われる．しかしこれは平面領域だけを(しかもこのような領域に対するポテンシャル論の第一境界値問題の解決だけを)とり扱っている．任意のリーマン面に対してディリクレの原理をどのように基礎づけるべきかを示したのは，R. König, Konforme Abbildung der Oberfläche einer räumlichen Ecke, Leipziger Habilitationsschrift 1911 であり，これは Math. Ann., **71**, 184–205 ページに印刷されている．われわれの，Riemann-Hilbert のそれからはずれた補題によって，広い範囲にわたって単純化がもたらされる．

に必要で十分な条件は，どのような正の ε に対しても或る正の δ が見いだされ，ディリクレ積分に値 $<d+\delta$ を与える任意の二つの比較関数 v_1, v_2 に対して，

$$|\vartheta(v_1)-\vartheta(v_2)|<\varepsilon$$

となることである.

われわれが証明しなければならない定理はつぎのようにいい表わされる: $\mathbf{D}(u)=d$ という性質をもつ比較関数 u が存在する.

B. Levi の不等式[1]からこの証明を始めよう; この不等式は，二つの比較関数 v_1, v_2 のディリクレ積分が下限 d に近づけば，その差 v_1-v_2 のディリクレ積分はきわめて小さくなることをいい表わしている: すなわち

$$\sqrt{\mathbf{D}(v_1-v_2)} \leqq \sqrt{\mathbf{D}(v_1)-d}+\sqrt{\mathbf{D}(v_2)-d}.$$

実際，λ_1, λ_2 は任意の二つの定数で $\lambda_1+\lambda_2 \neq 0$ ならば，v_1, v_2 とともに

$$\frac{\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

も比較関数であり，したがって

$$\mathbf{D}(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2) \geqq d\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^2.$$

この不等式は $\lambda_1+\lambda_2=0$ に対しても正当さを失わない. それゆえ，λ_1, λ_2 の二次形式

$$\lambda_1^2[\mathbf{D}(v_1)-d]+2\lambda_1\lambda_2[\mathbf{D}(v_1 v_2)-d]+\lambda_2^2[\mathbf{D}(v_2)-d]$$

はつねに $\geqq 0$ であり，したがって

$$[\mathbf{D}(v_1)-d][\mathbf{D}(v_2)-d] \geqq [\mathbf{D}(v_1 v_2)-d]^2$$

でなければならない. ところで

$$\begin{aligned} 0 \leqq \mathbf{D}(v_1-v_2) &= \mathbf{D}(v_1)-2\mathbf{D}(v_1 v_2)+\mathbf{D}(v_2) \\ &= [\mathbf{D}(v_1)-d]+[\mathbf{D}(v_2)-d]-2[\mathbf{D}(v_1 v_2)-d] \\ &\leqq [\mathbf{D}(v_1)-d]+[\mathbf{D}(v_2)-d]+2\sqrt{[\mathbf{D}(v_1)-d][\mathbf{D}(v_2)-d]} \\ &= \{\sqrt{\mathbf{D}(v_1)-d}+\sqrt{\mathbf{D}(v_2)-d}\}^2. \end{aligned}$$

すでに Levi の不等式から，おおよそつぎのような推論を下すことができる:

1) B. Levi, Sul principio di Dirichlet, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22 (1906), 293–360 ページ，§7.

v を変化させ，$\mathbf{D}(v)$をその下限 d に向かって近づけるならば，v 自身が或る極限関数に収束し，そしてこれが求める最小関数となるであろう．実際，$\mathfrak{p}$ はこの面上の任意の一点，$z=x+iy$ は $\mathfrak{p}$ に属する局所一意化変数，$K: |z|\leqq a$ は一つの z 円板，$\mathfrak{E}$ は K 内の任意の閉集合で，z 平面において決まった面積をもつものとすれば，シュワルツの不等式を $\dfrac{\partial(v_1-v_2)}{\partial x}$ と 1 に適用することによって，

$$\left|\int\int_{\mathfrak{E}}\left\{\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial v_2}{\partial x}\right\}dxdy\right|\leqq a\sqrt{\pi}\sqrt{\mathbf{D}(v_1-v_2)}$$

が得られる．それゆえ，K のなかにあるすべての閉領域 $\mathfrak{E}$ に対して一様に，極限値

$$\lim_{v}\int\int_{\mathfrak{E}}\frac{\partial v}{\partial x}dxdy,\qquad \lim_{v}\int\int_{\mathfrak{E}}\frac{\partial v}{\partial y}dxdy$$

が存在する．いいかえると，微分商 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ そのものについては，これが収束するということはできないけれども，微分商の<u>二重積分</u>についてはそのことが成り立つ．微分商の代りに，関数 v そのものに戻ると一そうつごうがよい；そこで，同じ意味において

$$\lim_{v}\int\int_{\mathfrak{E}}v\,dxdy$$

が存在することを見よう．最小関数 u があるときには，この極限はさらに $=\displaystyle\int\int_{\mathfrak{E}}u\,dxdy$ でなければならない．$\mathfrak{E}$ としては K そのものをとり，u がポテンシャル関数であろうということ，したがって(K が孔のあいた面にすっかりはいっているときはいつでも)

$$\frac{\displaystyle\int\int_{K}u\,dxdy}{\pi a^2}=K \text{ における } u \text{ の平均値}$$
$$=u(\mathfrak{p})$$

であることに注意すれば，求める存在証明をつぎのように述べるという着想に到達する：値

$$\lim_{v}\frac{1}{\pi a^2}\int\int_{K}v\,dxdy$$

をこの円の中心点における u の関数値として対応させ，それからこのようにし

て得られた関数が実際に最小関数であることを示す：極限関数はポテンシャル関数であろうから，収束をひき起こすためにあらかじめ行われる円板上の積分は極限に影響しない．

この考えの筋道を実行しようとするときには，まず v_1-v_2 のディリクレ積分を v_1-v_2 の二乗積分に置き換えなければならない．そのためにつぎのことを示そう：$\mathfrak{p}$ は一つの点，z はそれに属する局所一意化変数，$K:|z|\leqq a$ は一つの z 円板であるとすれば，K_0 のまわりの境界積分 $\int_0^{2\pi} w d\varphi_0$ が値 0 をとり，この面の上で連続的に微分可能なすべての関数 w に対して，

$$\iint_K w^2 dxdy \leqq C\cdot\mathbf{D}(w)$$

となるような数 C が存在する．

点の鎖 $\mathfrak{p}_0=O$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_n=\mathfrak{p}$ と，これらに属する局所一意化変数 $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n=z$ をとり，各点 $\mathfrak{p}_i$ のまわりに z_i 円板 $K_i:|z_i|\leqq a_i$($\mathfrak{p}_0$ のまわりには円板 K_0, $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_n$ のまわりには円板 $K=K_n$)を描こう；この際，K_{i+1} がつねに K_i の上に重なる(すなわち，K_i と K_{i+1} が内点を共有する)ように留意する．こうすればまず §13 により，

$$\iint_{K_0} w^2 dx_0 dy_0 \leqq \frac{a_0^2}{2}\iint_{K_0}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y_0}\right)^2\right]dx_0 dy_0 \leqq \frac{a_0^2}{2}\mathbf{D}(w)$$

となる．それゆえ，K_0 についてはわれわれの主張が正しい；このことから，K_1 についても同じようにそれが成り立つという結論を導こう．いま使った定理によって，

$$\iint_{K_1}(w-c)^2 dx_1 dy_1 \leqq \frac{a_1^2}{2}\mathbf{D}(w)$$

となるような定数 c はともかく存在する．K_0 にも K_1 にもはいっている点から成る点集合を $\mathfrak{S}_{01}$ と書き表わせば，$\mathfrak{S}_{01}$ において変数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_0=x_0+iy_0$ は一つの変換によって結びつけられ，この変換は $\mathfrak{S}_{01}$ の境界を越えてもなお正則解析的である．したがって関数行列式

$$\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x_0, y_0)}=\left|\frac{dz_1}{dz_0}\right|^2$$

は $\mathfrak{E}_{01}$ において上限 M_{01} をもち,

$$\iint_{\mathfrak{E}_{01}} w^2 dx_1 dy_1 = \iint_{\mathfrak{E}_{01}} w^2 \frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x_0, y_0)} dx_0 dy_0$$

$$\leqq M_{01} \iint_{\mathfrak{E}_{01}} w^2 dx_0 dy_0 \leqq M_{01} \iint_{K_0} w^2 dx_0 dy_0$$

$$\leqq M_{01} \frac{{a_0}^2}{2} \mathbf{D}(w) \tag{31}$$

であり, 他方では

$$\iint_{\mathfrak{E}_{01}} (w-c)^2 dx_1 dy_1 \leqq \frac{{a_1}^2}{2} \mathbf{D}(w). \tag{32}$$

z_1 平面における $\mathfrak{E}_{01}$ の像集合の面積を J_{01} で表わせば,

$$J_{01} = \iint_{\mathfrak{E}_{01}} dx_1 dy_1 > 0$$

であるから, (31) と (32) を加えれば,

$$c^2 \leqq 2[w^2 + (c-w)^2]$$

により,

$$c^2 \cdot J_{01} \leqq ({a_0}^2 M_{01} + {a_1}^2) \mathbf{D}(w),$$

したがって

$$\iint_{K_1} w^2 dx_1 dy_1 \leqq 2\left[\iint_{K_1} (w-c)^2 dx_1 dy_1 + c^2 {a_1}^2 \pi\right]$$

$$\leqq {a_1}^2 \left(1 + \frac{2\pi({a_1}^2 + {a_0}^2 M_{01})}{J_{01}}\right) \cdot \mathbf{D}(w)$$

が得られる.

こうして K_1 に対する証明は終わった. 今度は K_1 から K_2 に関する結果を導き, 以下同様とすれば, 最後には $K_n = K$ に到達する. この結果を二つの比較関数 v_1, v_2 の差に適用すれば,

$$\iint_K (v_1 - v_2)^2 dx dy \leqq C\{\sqrt{\mathbf{D}(v_1) - d} + \sqrt{\mathbf{D}(v_2) - d}\}^2 \tag{33}$$

を得る.

K において連続な関数の平均値

$$\frac{1}{\pi a^2} \iint_K f dx dy$$

を一般に $\underset{K,z}{\mathbf{M}} f$ で表わそう．孔のあいた面の上の点と覆いのなかの点とを区別して考える．$\mathfrak{p}$ が孔のあいた面の上にあるときは，K もまた孔のあいた面のなかにすっかりはいるようにとる．そうすればすぐ上の不等式により，

$$\lim_v \underset{K,z}{\mathbf{M}} v = u$$

が存在する．$\mathfrak{p}$ が覆いのなかの点で，$z_0(\mathfrak{p})=c_0$ であるときは，z_0-c_0 を局所一意化変数 z としてとることができ，z 円板 K はすっかり覆いのなかにあるとしよう．このとき

$$\lim_v \underset{K,z}{\mathbf{M}} v^* = u^*$$

が存在する．われわれは，u, u^* が $\mathfrak{p}$ だけによって定まり，局所一意化変数 z と z 円板 K の選び方には無関係であることをいおう．

孔のあいた面のなかの点 $\mathfrak{p}$ に対して証明を行なう．それゆえ，$z'=x'+iy'$ は $\mathfrak{p}$ に属するもう一つの局所一意化変数，$K' : |z'| \leqq a'$ は一つの z' 円板であるとする．まず K' がすっかり K のなかにはいっていると仮定しよう．$\bar{v}$ は K におけるポテンシャル関数で，境界では v と一致するものとする．$\mathbf{D}_K(\bar{v}) \leqq \mathbf{D}_K(v)$ であり，また K 以外では v と一致する比較関数 $\tilde{v}$ を適当にとれば，これに対して

$$\mathbf{D}_K(\tilde{v}-\bar{v}) = \mathbf{D}_K(\tilde{v}) - \mathbf{D}_K(\bar{v})$$

をいくらでも小さくすることができる．また，

$$\mathbf{D}_K(\tilde{v}-v) = \mathbf{D}(\tilde{v}-v) \leqq (\sqrt{\mathbf{D}(v)-d} + \sqrt{\mathbf{D}(\tilde{v})-d})^2$$

が成り立つ；したがって

$$\mathbf{D}_K(\bar{v}-v) = \mathbf{D}_K(v) - \mathbf{D}_K(\bar{v}) \leqq 4[\mathbf{D}(v)-d]$$

でなければならない[1]．$\bar{v}-v$ は円板 K の境界で消えるから，上の式により

$$\iint_K (\bar{v}-v)^2 dxdy \leqq a^2[\mathbf{D}(v)-d],$$

さらにシュワルツの不等式を使って

$$\left| \underset{K,z}{\mathbf{M}} v - \underset{K,z}{\mathbf{M}} \bar{v} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mathbf{D}(v)-d}$$

が得られる．$\bar{v}$ はポテンシャル関数であるから，$\underset{K,z}{\mathbf{M}} \bar{v} = \bar{v}(\mathfrak{p})$ であり，したがっ

1) (訳注) 106 ページの訳注を参照.

て

$$\lim_{v} \underset{K,z}{\mathbf{M}}\, v = \lim_{v} \bar{v}(\mathfrak{p}), \qquad \lim_{v} \bar{v}(\mathfrak{p}) = u$$

を得る. K' においては, z と z' が一つの変換によって結びつけられ, その変換は K' の境界を越えても解析的である; M は K' における $\left|\dfrac{dz'}{dz}\right|^2$ の上限であるとすれば,

$$\iint_{K'} (\bar{v}-v)^2 dx'dy' \leqq a^2 M[\mathbf{D}(v)-d]:$$

$$\lim_{v} \underset{K',z'}{\mathbf{M}}\, \bar{v} = \lim_{v} \underset{K',z'}{\mathbf{M}}\, v$$

が成り立つ. ところが $\bar{v}$ は変数 x', y' についてもポテンシャル関数であるから, $\underset{K',z'}{\mathbf{M}}\, \bar{v} = \bar{v}(\mathfrak{p})$ でなければならない; それゆえ

$$\lim_{v} \underset{K',z'}{\mathbf{M}}\, v = \lim \bar{v}(\mathfrak{p}) = \lim_{v} \underset{K,z}{\mathbf{M}}\, v.$$

K' が K のなかにはいっていないときには, 中間項として, K' にも K にも含まれる z' 円板 K_*' を利用する. そうすればわれわれの証明法により,

1) $\lim_{v} \underset{K,z}{\mathbf{M}}\, v = \lim_{v} \underset{K_*',z'}{\mathbf{M}}\, v$; 2) $\lim_{v} \underset{K',z'}{\mathbf{M}}\, v = \lim_{v} \underset{K_*',z'}{\mathbf{M}}\, v$

が得られ, これからまた

$$\lim_{v} \underset{K,z}{\mathbf{M}}\, v = \lim_{v} \underset{K',z'}{\mathbf{M}}\, v$$

がこの場合にも導かれる. 覆いの点に対して同じような推論をしようと思うならば, K が孔の周に重なる場合, 110 ページで詳しく述べたことから出て来る関係

$$\mathbf{D}_K(v) - \mathbf{D}_K(\tilde{v}) = \mathbf{D}_K(v^*) - \mathbf{D}_K(\tilde{v}^*)$$

に注意する必要がある; この関係によって等式 $\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial r_0}\right)_{r_0=a} = 0$ は利用し尽くされる.

数 u と u^* を関数値として点 $\mathfrak{p}$ に対応させよう; こうすれば孔のあいた面で定義された関数 $u(\mathfrak{p})$ と, 覆いにおける関数 $u^*(\mathfrak{p})$ を得る. 孔のあいた面における関数 $u(\mathfrak{p})$ を調べるために, $\mathfrak{p}$ のまわりの z 円板 K のなかにあるすべての点 $\mathfrak{q}$ を考え, z 平面における K の像(ここでは $\mathfrak{p}$ が原点である)についてつぎのような考察を行なう. $\mathfrak{q}$ のまわりに(z 平面において)K に内接する円板 $K_\mathfrak{q}$ を描こう; この半径は $q = a - |z(\mathfrak{q})|$ である. v_1 は v と並んで第二の比較関数

であるとし，$\bar{v}$ はもとのものを意味するとすれば，公式(33)において v_2 を $\bar{v}$ に置き換えることにより，

$$\iint_{K\mathfrak{q}}(\bar{v}-v_1)^2dxdy \leqq C(\sqrt{\mathbf{D}(v)-d}+\sqrt{\mathbf{D}(v_1)-d})^2$$

が成り立ち[1]，したがって

$$|\bar{v}(\mathfrak{q})-\underset{K\mathfrak{q}}{\mathbf{M}}\,v_1| \leqq \frac{\sqrt{C}}{q\sqrt{\pi}}(\sqrt{\mathbf{D}(v)-d}+\sqrt{\mathbf{D}(v_1)-d})$$

となる．ここで v_1 に極限への移行 $\lim \mathbf{D}(v_1)=d$ を施そう：そのとき

$$|u(\mathfrak{q})-\bar{v}(\mathfrak{q})| \leqq \frac{\sqrt{C}}{q\sqrt{\pi}}\sqrt{\mathbf{D}(v)-d}.$$

それゆえ，すっかり K の内部に含まれる任意の同心円板において一様に $\bar{v}(\mathfrak{q})$ は $u(\mathfrak{q})$ に収束する．したがって u は $\mathfrak{p}$ においてポテンシャル関数であり(97ページ)，$\bar{v}$ の第1階導関数もまた同じ意味で一様に，対応する u の導関数に収束する．

全く同様に，u^* は覆いのなかで正則なポテンシャル関数である．$\mathfrak{p}$ が閉じ合わせの環の内部の一点を意味するとき，z_0 平面において $\mathfrak{p}$ のまわりに円板 K を描き，それがすっかり閉じ合わせの環のなかにはいるようにすれば，

$$u(\mathfrak{p}) = \lim \underset{K}{\mathbf{M}}\,v;$$

$$u^*(\mathfrak{p}) = \lim \underset{K}{\mathbf{M}}\,v^* = \lim \underset{K}{\mathbf{M}}\,v-\underset{K}{\mathbf{M}}\,\phi$$

を得る．ϕ は閉じ合わせの環において正則なポテンシャル関数であるから，等式 $\underset{K}{\mathbf{M}}\,\phi=\phi(\mathfrak{p})$ が成り立つ；こうして

$$u(\mathfrak{p}) = u^*(\mathfrak{p})+\phi(\mathfrak{p})$$

という結論が得られる．それゆえわれわれはつぎのような関数の構成に成功した：孔のあいた面において正則-調和な関数 u と，覆いにおいて正則-調和な関数 u^* が閉じ合わせの環においては互いに $u=u^*+\phi$ にという関係を満たす．なお証明しなければならないのは，孔のあいた面で $=u(\mathfrak{p})$，孔で $=u^*(\mathfrak{p})$ となる関数 u が最小方程式 $\mathbf{D}(u)=d$ を満たすことである——もちろん閉じたリーマン面の理論に応用するためには，いままでに確かめられた u, u^* の性質だけで明らかにこと足りよう．しかしこの本の最後の節でとり扱うはずの一意化の

1) (訳注) まず(33)の v_2 を $\bar{v}$ にかえる．以下106ページの訳注を参照．

理論にとっては，最小の性質が本質的に重要である.

ディリクレ積分の計算に必要な，円板 K_l の周 κ_l による面の分割は，各円板 K_l が孔のあいた面にすっかりはいるか，または覆いにすっかり含まれるように整理することができる(あとの場合は z_0 平面における円板とみなされる). このとき面が分割されて生ずる切片の一つを $\mathfrak{S}_h$ とし，これが第一の種類の円板 K_l に含まれるとしよう. われわれは $\mathfrak{S}_h$ を一意化するために，局所一意化変数 $z_l=z=x+iy$ を使い，この変数に関して K_l が一つの円板であるとする. K_l' は K_l よりいくらか大きいけれども，やはり孔のあいた面のなかにすっかりはいる z_l 円板であるとし，各比較関数 v に対して，K_l' の境界で v と一致する K_l' 内のポテンシャル関数を $\bar{v}$ とする. このとき $\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ は K_l において一様に $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ に収束する; それゆえ

$$\lim_v \mathbf{D}_{K_l}(\bar{v}-u)=0.$$

他方,

$$\mathbf{D}_{K_l}(v-\bar{v}) \leqq \mathbf{D}_{K_l'}(v-\bar{v}) \leqq 4[\mathbf{D}(v)-d],$$

それゆえ

$$\lim_v \mathbf{D}_{K_l}(v-u)=0,$$

$$\lim_v \mathbf{D}_{\mathfrak{S}_h}(v-u)=0,$$

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{S}_h}(u)=\lim_v \mathbf{D}_{\mathfrak{S}_h}(v).$$

同じことは，第二の種類の円板に含まれる切片 $\mathfrak{S}_h$ についても証明される [まず

$$\lim_v \mathbf{D}_{\mathfrak{S}_h}(v^*-u^*)=0$$

の形で]. 任意の有限個の切片 $\mathfrak{S}_h$ について $\sum \mathbf{D}_{\mathfrak{S}_h}(u)$ をつくれば，この和は

$$=\lim_v \sum \mathbf{D}_{\mathfrak{S}_h}(v) \leqq \lim_v \mathbf{D}(v)=d$$

である. したがって $\mathbf{D}(u)$ は有限で $\leqq d$ である. それは $<d$ となりえないから, $\mathbf{D}(u)=d$ でなければならない. 証明終り.

§16. 閉リーマン面上の微分のあいだの関係.

ディィリクレの原理を使って§14におけるように互いに独立な第2種と第3種の基本微分を構成する代りに，与えられた閉リーマン面 $\mathfrak{F}$ に属し，極を除いて正則な微分を，§14では $d\tau$ で表わされた微分のうちの最も簡単なものからすべて導くこともでき[1]，この方法によれば同時に個々の微分のあいだに成り立つ関係について，きわめて整った概観が得られる．

$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{F}$ 上の一点で，$\zeta=\xi+i\eta$ は $\mathfrak{q}$ に属する局所一意化変数であるとしよう．$\mathfrak{q}$ においてだけ

$$\Re\frac{1}{\zeta}=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$$

のように無限大となるポテンシャル関数を——被覆面 $\hat{\mathfrak{F}}$ の上ではじめて一意になり，$\mathfrak{q}$ において1位の極をもつ第2種アーベル積分 $\tau_{\mathfrak{q}}$ の実部として——$\Re\tau_{\mathfrak{q}}$ で表わす．この関数記号の意味するところは，定義により点 $\mathfrak{q}$ ばかりでなく，$\mathfrak{q}$ に属する局所一意化変数 ζ の選び方にも依存する；このことを強調しなければならないときには，添字 $\mathfrak{q}$ だけを書く代りに $\mathfrak{q}\zeta$ と書こう．局所一意化変数として ζ の代りに $i\zeta$ を使えば，ポテンシャル関数

$$\Re\tau_{\mathfrak{q}}'=\Re\tau_{\mathfrak{q}\zeta}'=\Re\tau_{\mathfrak{q},i\zeta}$$

が得られ，これは点 $\mathfrak{q}$ においてだけ，しかも $\dfrac{-\eta}{\xi^2+\eta^2}$ のように無限大となる．

これらの関数が無限点 $\mathfrak{q}$ にどう依存するかを調べるためにはつぎのようにする：$\mathfrak{q}$ のまわりに一つの ζ 円板 $K: |\zeta|\leqq\alpha$ を限り，$\mathfrak{q}^*$ によって K 内を動く点を表わし，

$$\Re\tau_{\mathfrak{q}^*},\qquad \Re\tau_{\mathfrak{q}^*}'$$

により，$\mathfrak{q}^*$ において無限大となるポテンシャル関数で，局所一意化変数 $\zeta-\zeta(\mathfrak{q}^*)$ に対応するものを表わす．われわれはすぐあとで，これらの関数が——$\mathfrak{q}^*$ の各位置に対してなお指定することが許される加法的定数を適当に正規化すれば——$\mathfrak{q}^*$ に関して<u>連続</u>になることを示すであろう；$\mathfrak{q}$ の近傍 K のなかにある点 $\mathfrak{p}$ に対しては，

---

1) Klein-Fricke, Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 第 I 巻，518 ページ以下．

$$\mathfrak{R}\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{R}\frac{1}{\zeta(\mathfrak{p})-\zeta(\mathfrak{q}^*)} + R_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}),$$

(34)

$$\mathfrak{R}\tau_{\mathfrak{q}^*}'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{R}\frac{-i}{\zeta(\mathfrak{p})-\zeta(\mathfrak{q}^*)} + R_{\mathfrak{q}^*}'(\mathfrak{p})$$

と書き表わされ，$\mathfrak{q}^*$ と $\mathfrak{p}$ が K 内にある限り，R, R' は $\mathfrak{q}^*$ の連続関数であり，また $\mathfrak{p}$ についてはいたるところで正則なポテンシャル関数となるであろう．$\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ は K の内部にある二つの点であり，これらは K の内部で長さのある積分の道 γ によって結ばれているとしよう．γ に沿って双極子を縦方向に並べること，すなわち γ と一致する方向に大きさ一定のモーメントをもつ双極子を並べることによって，

$$(35)\quad \int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} \{\mathfrak{R}\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})\,d\xi_{\mathfrak{q}^*} - \mathfrak{R}\tau_{\mathfrak{q}^*}'(\mathfrak{p})\,d\eta_{\mathfrak{q}^*}\} = \mathfrak{R}\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p}) \qquad [\xi_{\mathfrak{q}^*} + i\eta_{\mathfrak{q}^*} = \zeta(\mathfrak{q}^*)]$$

の形で一つのポテンシャル関数を得る；これは $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ においてそれぞれ吸いこみとわき出し，すなわちそれぞれ留数 $+1$ と -1 を伴う対数的特異点をもち[素磁子から磁石をつくること!]，それゆえ第3種アーベル積分 $\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}$ である．なぜなら，K のなかにない点 $\mathfrak{p}$ に対しては，(35)の左辺は明らかに正則なポテンシャル関数であり，また K 内に $\mathfrak{p}$ があれば，それは(34)により，加法的につけ加えられるポテンシャル関数を除いて $=\log r_1 - \log r_2$ となるからである；ただし r_1, r_2 は ζ 平面における $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ から $\mathfrak{p}$ までの直線距離を意味する．—— 双極子を横方向に並べることにより，

$$(35')\quad \int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} \{\mathfrak{R}\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})\,d\eta_{\mathfrak{q}^*} + \mathfrak{R}\tau_{\mathfrak{q}^*}'(\mathfrak{p})\,d\xi_{\mathfrak{q}^*}\} = \mathfrak{R}\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'(\mathfrak{p})$$

の形で一つのポテンシャル関数を得る；これは $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ において，反対の回転の向きを伴う二つの渦をもつ[一つの電流による磁気二重層に同値なもの!]，すなわち K のなかの点 $\mathfrak{p}$ に対して加法的な正則ポテンシャル関数を除けば，ζ 平面における真っすぐな連結線 $\mathfrak{q}_1\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$ が互いにつくる角に等しい．関数 $\mathfrak{R}\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'$ は，積分の道 γ に沿って切れ目を入れた面 $\mathfrak{F}$ の上でだけ一意である．

この導き方を完全に基礎づけるためには，なお(35), (35')のなかで行われる積分の可能性に対して本質的な，“パラメータ” $\mathfrak{q}^*$ に関する $\mathfrak{R}\tau_{\mathfrak{q}^*}, \mathfrak{R}\tau_{\mathfrak{q}^*}'$ の連続

性を証明しなければならない．そのためには，これらのポテンシャル関数の構成まで戻って出なおす必要がある．ζ 平面の円 K に関する $\zeta(\mathfrak{q}^*)$ の鏡像点を $\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)$ によって表わすことにし，

$$\phi_{\mathfrak{q}^*}(\zeta)=\Re\left[\frac{1}{\zeta-\zeta(\mathfrak{q}^*)}-\left(\frac{\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)}{\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{\zeta-\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)}+\frac{1}{\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)}\right)\right]$$

をつくって，

$$u_{\mathfrak{q}^*}=\begin{cases}\Re\tau_{\mathfrak{q}^*} & (K\text{ の外部で})\\ \Re\tau_{\mathfrak{q}^*}-\phi_{\mathfrak{q}^*} & (K\text{ の内部で})\end{cases}$$

とおく．$\phi_{\mathfrak{q}^*}$ は K の境界で法線方向の導関数 0 をもつから，K の境界で飛躍 $\phi_{\mathfrak{q}^*}-\phi_{\mathfrak{q}}$ をもち，そのほかでは連続なすべての関数 v のうちで，$u_{\mathfrak{q}^*}-u_{\mathfrak{q}}$ が $\mathfrak{F}$ 全体におけるディリクレ積分 $\mathbf{D}(v)$ に最小値を与える．比較関数として特に，K の外部では 0 に等しく，K の内部では境界値において $\phi_{\mathfrak{q}}-\phi_{\mathfrak{q}^*}$ と一致する正則なポテンシャル関数によって定められる関数 v を使うことができる：すなわち

$$-v=\frac{2}{\alpha^2}\Re\left[\frac{\bar{\zeta}^2(\mathfrak{q}^*)}{\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)-\zeta}-\zeta-\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)\right]:$$

$$\mathbf{D}(u_{\mathfrak{q}^*}-u_{\mathfrak{q}})\leqq\mathbf{D}(v)=\frac{4\pi}{\alpha^2}\,\frac{q^2(2-q^2)}{(1-q^2)^2}\ \left(q=\frac{|\zeta(\mathfrak{q}^*)|}{\alpha}\right).\tag{36}$$

それゆえ $u_{\mathfrak{q}^*}-u_{\mathfrak{q}}$ のディリクレ積分は，$\mathfrak{q}^*$ が $\mathfrak{q}$ に近づくとき 0 に収束する；このことからわれわれの主張する連続性が出て来る．$\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$ のとき，K を十分小さくとって，$\mathfrak{p}$ は K の外部にあるようにし，$\mathfrak{p}$ に属する一つの局所一意化変数 z と，$\mathfrak{p}$ のまわりの円板 $K:|z|\leqq a$ を選んで，K は K と共通点をもたないようにしよう．$\mathfrak{p}^*$ は K のなかを動く点であるとし，$z(\mathfrak{p}^*)=x+iy$, $\dfrac{1}{a}|z(\mathfrak{p}^*)|=r$ とおけば，(36) と (22)[1] から，

$$\left(\frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}}{\partial x}-\frac{\partial u_{\mathfrak{q}}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}}{\partial y}-\frac{\partial u_{\mathfrak{q}}}{\partial y}\right)^2<8\left[\frac{q}{a\alpha(1-q^2)(1-r)}\right]^2,$$

すなわち

$$\left|\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}}{dz}-\frac{d\tau_{\mathfrak{q}}}{dz}\right|<2\sqrt{2}\,\frac{q}{a\alpha(1-q^2)(1-r)},$$

したがって，K よりもいくらか小さい同心円 $(r\leqq r_0<1)$ の上に $\mathfrak{p}^*$ を制限するならば，$\mathfrak{p}^*$ に関して一様に

1) (訳注) (23) を見よ．

$$\lim_{\mathfrak{q}^*\to\mathfrak{q}}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}}{dz}=\frac{d\tau_{\mathfrak{q}}}{dz} \tag{37}$$

である[1]. ——$\mathfrak{p}$ が K のなかにあるときは, (36)から,

$$\left(\frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}(\zeta)}{\partial\xi}-\frac{\partial u_{\mathfrak{q}}(\zeta)}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}(\zeta)}{\partial\eta}-\frac{\partial u_{\mathfrak{q}}(\zeta)}{\partial\eta}\right)^2$$
$$<8\left[\frac{q}{\alpha^2(1-q^2)(1-r)}\right]^2,\quad \left(r=\frac{|\zeta|}{\alpha}\right),$$

それゆえ $|\zeta|\leqq r_0\alpha$ (r_0 は決まった数で <1) において一様に

$$\lim_{\mathfrak{q}^*\to\mathfrak{q}}\frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}(\zeta)}{\partial\xi},\quad \frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}(\zeta)}{\partial\eta}=\frac{\partial u_{\mathfrak{q}}(\zeta)}{\partial\xi},\quad \frac{\partial u_{\mathfrak{q}}(\zeta)}{\partial\eta}$$

であることがわかる. 等式 $R_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{q}^*)=0$ によって加法的定数の正規化を行なえば, 上の事実から積分によって, つぎのことが得られる:

1) $\mathfrak{q}$ の或る近傍のなかのすべての $\mathfrak{p}$ に対して一様に, $\lim_{\mathfrak{q}^*\to\mathfrak{q}}R_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})=R_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$;

2) 点 $\mathfrak{q}$ の任意に小さい近傍を除けば, $\mathfrak{F}$ 上のすべての点に対して一様に $\lim_{\mathfrak{q}^*\to\mathfrak{q}}\Re\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})=\Re\tau_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$. こうして, われわれの主張した連続の性質が(任意の)点 $\mathfrak{q}^*=\mathfrak{q}$ に対して証明された.

(35), (35′)を一つの等式

$$\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}\{\Re\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})+i\,\Re\tau_{\mathfrak{q}^*}'(\mathfrak{p})\}\,d\zeta(\mathfrak{q}^*)=\Re\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})+i\,\Re\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'(\mathfrak{p}) \tag{38}$$

にまとめておく. $\mathfrak{p}$ は K の外部にあるとし, 記号 $K,\mathfrak{p}^*$ および $z=z(\mathfrak{p}^*)=x+iy$ は上と同じ意味に用いよう. $f(z)$ が複素変数 z の解析関数であるとき,

$$\frac{\partial}{\partial x}\Re f(z)=\Re\frac{df}{dz},\quad \frac{\partial}{\partial y}\Re f(z)=-\mathfrak{J}\frac{df}{dz}$$

である. それゆえ, 等式(38)においてまず $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}^*$ に置き換えたのち, x と y について微分すれば,

$$\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}\left\{\Re\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)}{dz}+i\,\Re\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}'(z)}{dz}\right\}d\zeta(\mathfrak{q}^*)=\Re\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(z)}{dz}+i\,\Re\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'(z)}{dz}, \tag{39}$$

1) (訳注) このことから, $\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}}{dz}$ は $\mathfrak{p}^*,\mathfrak{q}^*$ のそれぞれに関して連続であるばかりでなく, 2変数($\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{q}^*$)の関数として連続であることがわかる.

$$(39\text{i})\quad \int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}\left\{\mathfrak{I}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)}{dz}+i\,\mathfrak{I}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}'(z)}{dz}\right\}d\zeta(\mathfrak{q}^*)=\mathfrak{I}\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(z)}{dz}+i\,\mathfrak{I}\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'(z)}{dz}$$

を得る．積分記号下の微分演算を行ないうることは，(37)により $\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)}{dz}$, $\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}'(z)}{dz}$ が $\mathfrak{q}^*$ に連続に依存することから出て来る．

いよいよこの研究の本質的な結論を出そう：(39)からわかるように，被積分関数

$$\mathfrak{R}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)}{dz}+i\,\mathfrak{R}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}'(z)}{dz}$$

を K における $\zeta=\zeta(\mathfrak{q}^*)$ の関数と見れば，その ζ による積分は道に無関係である；すなわち<u>ζ の正則な解析関数</u>である．$\dfrac{d}{dz}$ の代りに $\dfrac{d}{d\mathfrak{p}^*}$ と書いてもよいことにしよう．$\mathfrak{q}$ に属する局所一意化変数 ζ に

$$\mathfrak{R}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}\zeta}(z)}{dz}+i\,\mathfrak{R}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}\zeta}'(z)}{dz}$$

が依存する仕方は，直接にもわかるし(39)からも確かめられるように，一つの微分の一点における値がそこで用いられた局所一意化変数に依存する仕方と同じである．それゆえ，

$$\mathfrak{R}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)}{dz}+i\,\mathfrak{R}\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}'(z)}{dz}=\frac{dv_{\mathfrak{p}^*}(\zeta)}{d\zeta}\left(=\frac{dv_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{q}^*)}{d\mathfrak{q}^*}\right)$$

となるような微分 $dv_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{q})$ が存在し，$\mathfrak{q}=\mathfrak{p}^*$ を除けば $\mathfrak{F}$ 上のすべての点 $\mathfrak{q}$ において正則-解析的である．ここまで来ると(39)はつぎのように書かれる：

$$\int_{\mathfrak{q}^*=\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}dv_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{q}^*)=\mathfrak{R}\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p}^*)}{d\mathfrak{p}^*}+i\,\mathfrak{R}\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'(\mathfrak{p}^*)}{d\mathfrak{p}^*}.$$

この公式は任意に引き伸ばされた積分の道 $\gamma=(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)$ に対しても成り立ち，もはやそれを $\mathfrak{q}$ の近傍 K に制限する必要はない；ただ $d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'$ は§14に述べた方法により，γ に沿って途中に点を挿入し，和をとることによって生ずる第3種微分であると理解しなければならない．これに反して，$d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}$ は挿入する点のとり方に無関係であり，それゆえ $\mathfrak{R}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}dv_{\mathfrak{p}^*}$ は積分の道によらない；すなわち $\mathfrak{R}v_{\mathfrak{p}^*}$ は $\mathfrak{F}$ 上で一意のポテンシャル関数であり，点 $\mathfrak{p}^*$ においてだけ特異となる．点 $\mathfrak{p}^*$ における挙動を概観するために，$\mathfrak{p}$ のまわりの円板 K のなかにとられた点 $\mathfrak{q}^*$ に対して，$z-z(\mathfrak{q}^*)$ を局所一意化変数として使えば，

$$\Re\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)=\Re\frac{1}{z-z(\mathfrak{q}^*)}+R_{\mathfrak{q}^*}(z)$$

となる；ここで $R_{\mathfrak{q}^*}(z)$, $\dfrac{\partial R_{\mathfrak{q}^*}(z)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R_{\mathfrak{q}^*}(z)}{\partial y}$ は $\mathfrak{q}^*$ の連続関数であって，点 $z(\mathfrak{q}^*)$ においても例外ではない；それゆえ，一つの加法的な付加項を除いて

$$\Re\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}^*)}{d\mathfrak{p}^*}+i\,\Re\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}'(\mathfrak{p}^*)}{d\mathfrak{p}^*}\sim\frac{-1}{[z(\mathfrak{p}^*)-z(\mathfrak{q}^*)]^2}$$

であり，付加項は $\mathfrak{q}^*$ が $\mathfrak{p}^*$ に近づくときにも一定の限界にとどまるから，$\mathfrak{q}^*=\mathfrak{p}^*$ においてもまた $\mathfrak{q}^*$ の正則な関数である；いいかえれば，$dv_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{q}^*)$ は第2種の微分であって，$\mathfrak{p}^*$ におけるその主要部は

$$\frac{-dz(\mathfrak{q}^*)}{[z(\mathfrak{q}^*)-z(\mathfrak{p}^*)]^2}$$

によって与えられ，その積分は $\mathfrak{F}$ 上で一意の実部をもつ：すなわち

$$dv_{\mathfrak{p}^*}=d\tau_{\mathfrak{p}^*}=d\tau_{\mathfrak{p}^*z}.$$

得られた結果をまとめよう．$\mathfrak{p},\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{F}$ 上の異なる二点，z は $\mathfrak{p}$ に属する一つの局所一意化変数，ζ は $\mathfrak{q}$ に属する一つの局所一意化変数としよう；これらの局所一意化変数によって，関数記号 $\tau_{\mathfrak{p}},\tau_{\mathfrak{q}}$ および微分演算記号 $\dfrac{d}{d\mathfrak{p}}$, $\dfrac{d}{d\mathfrak{q}}$ の意味は確定する．このとき，つぎの基本相互法則が成り立つ：

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\Re\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}=\Re\dfrac{d\tau_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}}, & \Re\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}'(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}=\Im\dfrac{d\tau_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}},\\[2ex] \Im\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}=\Re\dfrac{d\tau_{\mathfrak{p}}'(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}}, & \Im\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}'(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}=\Im\dfrac{d\tau_{\mathfrak{p}}'(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}}.\end{cases}$$

第3種微分は第2種微分からつぎの公式によって導かれる：

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases}\Re\displaystyle\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{p}}=\Re\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}, & \Im\displaystyle\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{p}}=\Re\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}},\\[2ex] \Re\displaystyle\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{p}}'=\Im\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}, & \Im\displaystyle\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{p}}'=\Im\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}.\end{cases}$$

この第二列にある等式において，$(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)$ を延長して一つの閉じた道 α にすれば，つぎの特殊な場合を得る：

$$(\mathrm{II}_0)\quad\int_{\alpha}d\tau_{\mathfrak{p}}=2\pi i\,\Re\frac{dw_{\alpha}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}},\qquad\int_{\alpha}d\tau_{\mathfrak{p}}'=2\pi i\,\Im\frac{dw_{\alpha}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}.$$

これにより，第1種微分は第2種基本積分の周期であることが示されている．

さらにこれらから，つぎの三つの事実が読みとられる(α, β, γ は $\mathfrak{F}$ 上の閉じた曲線を意味する)：

1. $\alpha \sim 0$ ならば，dw_α は恒等的に $= 0$;
2. $\alpha \sim \beta$ ならば，$dw_\alpha = dw_\beta$;
3. $\alpha + \beta \sim \gamma$ ならば，$dw_\alpha + dw_\beta = dw_\gamma$.

積分関数の被覆面 $\hat{\mathfrak{F}}$ における被覆変換 S の一つ一つには，$\mathfrak{F}$ 上の互いに位相合同な閉じた道 α から成る一つのクラスが自然に対応する：それらの道は，$\hat{\mathfrak{F}}$ において任意の点 $\hat{\mathfrak{p}}$ からその真上にある点 $\hat{\mathfrak{p}}S$ に至るすべての曲線の射影線である．上に注意した事実の 2. によって，このようなすべての α には同じ微分 dw_α が対応する；これは S によって一意的に定まるものであるから，これの適切な記法として dw_S を用いることもあろう．始点 $\mathfrak{p}_0$ を選んで固定し，$\mathfrak{p}_0$ から行なう積分演算を延長するとき，

$$-\Re \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} dw_S = u_S(\mathfrak{p})$$

はどのような積分の道を使ったかに依存するが，(終点 $\mathfrak{p}$ を動かさなければ)この道を変更することによって u_S は整の数値だけ増減しうるに過ぎない．(またこの性質により，すべての第1種積分の集まりのなかで積分 w_S が特徴づけられる.) それゆえ，絶対値1をもつ量

$$\chi_S(\mathfrak{p}) = e^{2\pi i u_S(\mathfrak{p})}$$

は $\mathfrak{p}$ の一意関数である．S, T が $\hat{\mathfrak{F}}$ からそれ自身への任意の二つの被覆変換であるときは，

$$\chi_S(\mathfrak{p}) \cdot \chi_T(\mathfrak{p}) = \chi_{ST}(\mathfrak{p})$$

が成り立つ．一般に，何か或る方法で $\hat{\mathfrak{F}}$ の各被覆変換 S に絶対値1の数 χ_S が対応させられており，しかも乗法規則

$$\chi_S \cdot \chi_T = \chi_{ST}$$

が成り立つとき，($\hat{\mathfrak{F}}$ からそれ自身への被覆変換の全体から成る可換群の)**指標系**が一つ定められているという．これに合わせて，いろいろな変換 S に対応する量 $\chi_S(\mathfrak{p})$ の全体を $\mathfrak{p}$ の**積分指標**の系と呼ぼう．$\mathfrak{p}$ の積分指標を全部与える

ということは，すべての第1種積分の点 $\mathfrak{p}$ における値を同時に指定すること――あるいはもっと正確にいえば，同時に考えられたこの値の系において，積分の道を置き換えても変わらないものを指定することに相当する．――なおのちの応用のために，つぎのことに注意しよう：一つの指標系を一つの個別的なもの，一つの"点"とみなすならば，考えられるすべての指標系の集まりは $2p$ 次元の閉じた多様体をつくる．なぜなら，

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_{2p}$$

が $\hat{\mathfrak{F}}$ の被覆変換の群に対する一つの基底であるとき(85ページを参照)，

$$\chi_{S_1},\ \chi_{S_2},\ \cdots,\ \chi_{S_{2p}}$$

を χ 平面の単位円周 $|\chi|=1$ に沿って互いに独立に動かすならば，すべての指標系が一度ずつ，そして一度だけ得られるからである．

公式(II)の助けを借りると，第2種微分に関する相互法則(I)は第3種積分に移される．

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \Re[\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}]_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Re[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}, & \Im[\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}]_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Re[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}']_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}, \\ \Re[\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}']_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Im[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}, & \Im[\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}']_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Im[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}']_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}. \end{cases}$$

これらの等式は変数とパラメータの交換に関する定理と呼ばれるのがつねであり，これらは使われた道 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ が互いに交わらないときに成り立つ．これを証明するために，道 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ はすっかり $\mathfrak{p}$ のまわりの z 円板 K のなかに，$\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ はすっかり $\mathfrak{q}$ のまわりの ζ 円板 K のなかにあると仮定しよう．われわれは z 平面の真っすぐな線分 $s=(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$ が実(x)軸に平行，ζ 平面の線分 $\sigma=(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)$ が実(ξ)軸に平行であると仮定することができる(そのためには場合により座標軸を回転しなければならないが，これによって微分 $d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}, d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}$ の意味は影響を受けない)．(I)の第1式において $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ の代りに，それぞれ K および K の内部を動く点 $\mathfrak{p}^*, \mathfrak{q}^*$ をとり(この際，上記のような表現の意味を一意的に確定するため，一意化変数 z と ζ を使うことにする)，それから s に沿って $z=z(\mathfrak{p}^*)$ につき積分し，σ に沿って $\zeta=\zeta(\mathfrak{q}^*)$ につき積分すれば[1]，

$$\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}\Re\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)}{dz}\cdot dzd\zeta = \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}\Re\frac{d\tau_{\mathfrak{p}^*}(\zeta)}{d\zeta}\cdot d\zeta dz$$

1)(訳注)　128ページの訳注を参照.

となる．左辺の内側の積分計算は実軸に平行になされるから，それを行なった結果は，

$$\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}\Re\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)}{dz}\cdot dz=\Re\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}d\tau_{\mathfrak{q}^*}=\Re\frac{d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}(\zeta)}{d\zeta}$$

となり，同じ理由から

$$\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}\Re\frac{d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}(\zeta)}{d\zeta}\cdot d\zeta=\Re\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}=\Re[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}$$

となる．同じ方法によって右辺をも処理すれば，(III)の最初の式が確かめられる．それゆえ等式(III)を(I)から得るには，(I)を変数($\mathfrak{p}$)およびパラメータ($\mathfrak{q}$)について積分し，一方の辺で積分の順序を交換したのち，等式(II)を使って内側の積分を行なえばよい．

道 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ が互いに交わる場合に生ずる修正を見とおすためには，これら二つの道が z 円板 K のなかを通る場合を考える必要がある．このときは道 $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ を移動させ，これが $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ とは交わらないけれども，なおつねに K の内部を通るようにする．これによって(III)の第1式と第4式に現われる量は値を変えない；それゆえ，これら二つの公式は何の制限もなく成り立つ．これに反して，第2式と第3式の右辺の値はこの移動により 2π の整数倍だけ増減するのに，左辺の値はここでもまた保たれる．それゆえこれら二つの公式は，

$$\Im[\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}]_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}=\Re[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}']_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}-2n\pi,$$

$$\Re[\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}']_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}=\Im[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}-2n\pi$$

{n は整数}

という形に修正したときだけ何の制限もなく成り立つ．

特に $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ が閉曲線 α であるときは，

$$(\mathrm{III}_0)\quad \int_\alpha d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}=2\pi i\,\Re\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}dw_\alpha,\qquad \Im\int_\alpha d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}'=2\pi\,\Im\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}dw_\alpha$$

を得る．第1式では $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ が α と出会わないことを仮定している．最後の式において，$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ としてもまた閉じた道 β をとれば，対称法則

$$(\mathrm{III}_{00})\quad \Im\int_\alpha dw_\beta=\Im\int_\beta dw_\alpha$$

が得られる．

最後になお残されたのは，1より高い位数の極をもつ第2種積分を微分 $d\tau_{\mathfrak{q}}$, $d\tau_{\mathfrak{q}}'$ から導き出すことである.（I）から，あらかじめ $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{q}^*$ に代え，$\xi=\xi(\mathfrak{q}^*)$ について微分することにより，

$$\Re\frac{d^2\tau_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2}+i\,\Re\frac{d^2\tau_{\mathfrak{p}}'(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2}=\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}\right)\right]_{\xi(\mathfrak{q}^*)=0}$$

が出て来る．これによって，左辺は

$$=\frac{d\tau_{\mathfrak{q}}{}^2(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}$$

と置くことができ，この $d\tau_{\mathfrak{q}}{}^2$ は $\mathfrak{F}$ 上のいたるところで正則であるが，点 $\mathfrak{q}$ においてだけ無限になり，しかも左辺に書かれた式からわかるように，そこで主要部 $-\dfrac{2d\zeta}{\zeta^3}=d\left(\dfrac{1}{\zeta^2}\right)$ をもつ微分を意味する．この第2種積分 $\tau_{\mathfrak{q}}{}^2$ の周期は純虚数である．こうしてつぎの関係が得られる：

$$(\mathrm{I}^2)\quad\begin{cases}\Re\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}{}^2(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}=\Re\dfrac{d^2\tau_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2}, & \Im\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}{}^2(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}=\Re\dfrac{d^2\tau_{\mathfrak{p}}'(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2},\\[2ex] \Re\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}{}^{2\prime}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}=\Im\dfrac{d^2\tau_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2}, & \Im\dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}{}^{2\prime}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}=\Im\dfrac{d^2\tau_{\mathfrak{p}}'(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2}.\end{cases}$$

(II), (II_0) において $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}^*$ に代え，$x=\Re z(\mathfrak{p}^*)$ について微分すれば，

$$(\mathrm{II}^2)\quad\begin{cases}\Re\displaystyle\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{p}}{}^2=\Re\frac{d^2\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2}, & \Im\displaystyle\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{p}}{}^2=\Re\frac{d^2\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2},\\[2ex] \Re\displaystyle\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{p}}{}^{2\prime}=\Im\frac{d^2\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2}, & \Im\displaystyle\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}d\tau_{\mathfrak{p}}{}^{2\prime}=\Im\frac{d^2\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}'(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2}.\end{cases}$$

$$(\mathrm{II}_0{}^2)\quad\left\{\int_\alpha d\tau_{\mathfrak{p}}{}^2=2\pi i\,\Re\frac{d^2w_\alpha(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2},\qquad\int_\alpha d\tau_{\mathfrak{p}}{}^{2\prime}=2\pi i\,\Im\frac{d^2w_\alpha(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2}.\right.$$

n 位の極をもつ積分に対しても，対応する等式(I^n), (II^n), $(\mathrm{II}_0{}^n)$が成り立つ.

これらの関係(普通はリーマンと C. Neumann に従い，切断された面の境界を“ひとまわりして積分する”方法によって導き出すことが多い)はすべて，双極子を縦方向に連続的に並べると二つの反対符号をもつわき出しが得られ，また横方向に連続的に並べると反対の向きにまわる渦の対が得られるという直観的な，よく知られた事実の直接的な帰結であることがわかる.

§17. $\hat{\mathfrak{F}}$上の加法的および乗法的関数の部分族として$\mathfrak{F}$上の一意関数を考えること. リーマン－ロッホの定理とアーベルの定理.

超越的な，正規化された第2種アーベル積分，あるいは“**加法的関数**”の名の下にわれわれが理解するのは，積分関数の被覆面 $\hat{\mathfrak{F}}$ の上で一意の，極を除いて正則な関数 $\upsilon(\hat{\mathfrak{p}})$ のうちで，$\hat{\mathfrak{F}}$ の各被覆変換 S に対して加法的に振舞うもの，すなわち

$$\upsilon(\hat{\mathfrak{p}}S) = \upsilon(\hat{\mathfrak{p}}) + ci$$

となるものである；ただし ci は S によって定まり，$\hat{\mathfrak{p}}$ には無関係な純虚の定数を意味する．このような一つの加法的関数 υ の極が $\mathfrak{F}$ 上の点 $\mathfrak{p}$ の真上にあるとしよう；このような点 $\mathfrak{p}$ は有限個しかなく，z が $\mathfrak{p}$ に属する一つの局所一意化変数，したがって $\mathfrak{p}$ の真上にある $\hat{\mathfrak{F}}$ のすべての点に属する局所一意化変数を意味するとき，υ は $\mathfrak{p}$ の真上にあるすべての点において同じ“主要部”

$$\frac{A_{-1}}{z} + \frac{A_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{A_{-r}}{z^r}$$

をもつ．極の位置とそこにおける主要部はあらかじめ自由に与えることができ，その結果関数 υ は加法的定数を除いて一意的に定められる：すなわち

$$(40) \quad \upsilon = \sum_{\mathfrak{p}} \left[(a\tau_{\mathfrak{p}} + a'\tau_{\mathfrak{p}}') + (a^2\tau_{\mathfrak{p}}^2 + a^{2'}\tau_{\mathfrak{p}}^{2'}) + \cdots + (a^r\tau_{\mathfrak{p}}^r + a^{r'}\tau_{\mathfrak{p}}^{r'}) \right]$$
$$+ \text{任意定数} \qquad (a^h = \Re A_{-h},\ a^{h'} = -\Im A_{-h})$$

(和は異なる極 $\mathfrak{p}$ の全部にわたってとる)．この表現は有理関数の部分分数分解に対する類似のものである．それゆえこの類似を得るために，われわれは $\mathfrak{F}$ 上でたかだか極をもつ一意の関数から成る族を，もっと広い“加法的関数”の全体にまで拡張しなければならないのである．

部分分数分解と並んで，一次因数の積として有理関数を表わすことが重要である．この表現を球面から任意の閉じたリーマン面に移すためには，“**乗法的関数**”について説明しなければならない；それは被覆面 $\hat{\mathfrak{F}}$ の上で一意の，極を除いて正則な関数 Θ のうちで，$\hat{\mathfrak{F}}$ の各被覆変換 S に対して乗法的に振舞うもの，すなわち

$$\Theta(\hat{\mathfrak{p}}S) = \mu_S \cdot \Theta(\hat{\mathfrak{p}})$$

となるものである；ただし乗数 μ_S は S に依存し，絶対値1をもつ定数である[1]．μ_S の全体は指標系をつくる．Θ は $\mathfrak{F}$ の一点 $\mathfrak{p}$ の真上にあるすべての点において同じ位数をもつ；これは正のこともあり(このとき Θ は $\mathfrak{p}$ の真上で零点をもつ)，負(Θ は $\mathfrak{p}$ の真上で極をもつ)あるいは0のこともある．一つの乗法的関数の零点と極が真上に来るような $\mathfrak{F}$ 上の点は，それらの位置と重複度に関して，有限の数で任意にあらかじめ指定することができる——ただ一つの制限は，零点の個数と極の個数が，各零点と各極における実際の重複度を考慮に入れるとき，等しくなければならないということである．そして零点と極をあらかじめ与えることにより，Θ は任意の定数因数($\neq 0$)を除いて一意に定められる．事実，零点も極ももたない乗法的関数 Θ は定数のほかに存在しない；そのような関数からは $\log|\Theta|$ の形で，$\mathfrak{F}$ 上で一意の，いたるところで正則なポテンシャル関数がつくられるが，それは存在しないからである．零点と極の個数が等しくなければならないということは，$\dfrac{d\Theta}{\Theta}$ が $\mathfrak{F}$ の上で第3種微分となり，その留数の和が

$$= \Theta \text{ の零点の個数} - \text{極の個数}$$

であるということから確かめられる．1, 2 が $\mathfrak{F}$ 上の任意の二点であるとき，

$$e^{\omega_{12}} = \Theta_{12} \qquad (e = \text{自然対数の底})$$

は一つの乗法的関数であって[2]，1 の真上には一つの零点，2 の真上には一つの極をもつ(そして一つの零点と一つの無限点しかもたないというこの性質によって，z 球面上の一次因数 $z-a$ または $\dfrac{z-a}{z-b}$ に対応する)．関数 Θ に対して

あらかじめ指定された零点を　　$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_r$,

---

1) Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, 全集，第2版，140 ページ；また特に，Appell, Journal de mathématiques, 3 Ser., **9**(1883), および Acta Mathematica, **13**(1890) を参照.

2) (第2版巻末の訂正と補注)　Θ_{12} が $\hat{\mathfrak{F}}$ 上の一意関数であるということの証明は，133 ページの等式(III_0)から得られる；実際，~ 0 である道 α に対して dw_α は消えるから，

$$\int_\alpha d\omega_{12} = 2n\pi i, \quad \exp\int_\alpha d\omega_{12} = 1.$$

それゆえ，$\hat{\mathfrak{F}}$ 上で閉じた道 α に対してはつねにあとの等式が成り立ち，したがって $\hat{\mathfrak{F}}$ 上で関数

$$\exp\int d\omega_{12} = \theta_{12}$$

をつくるとき，一つ選んで固定した始点 $\hat{\mathfrak{p}}_0$ から $\hat{\mathfrak{F}}$ 上の動点 $\hat{\mathfrak{p}}$ まで積分することにすれば，この値は積分の道に無関係であり，$\hat{\mathfrak{p}}$ の一意関数となる.

(訳注)　道 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ が α と交わるとき(III_0)の第一式の右辺に $2n\pi i$ が加わる.

あらかじめ指定された極を　$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_r$

とすれば(この際，各零点と各極は，その重複度が要求する回数だけ書き並べる)，求める Θ は等式

$$\Theta = \text{定数}\cdot\Theta_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1}\cdot\Theta_{\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2}\cdot\cdots\cdot\Theta_{\mathfrak{p}_r\mathfrak{q}_r}$$

によって得られる；この式においてわれわれは，有理関数の積表現に対する類似の結果を得る. われわれはまたこの等式を記号的な形

$$\Theta = \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_r} \tag{41}$$

に書く. ここですべての $\mathfrak{p}_h$ がすべての $\mathfrak{q}_h$ と異なることは自明な仮定であった. そうでない場合には，右辺の記号に対して，普通の分数の場合のように，分子にも分母にも現われる点を“約する”ときに得られる意味を与えることにする.

乗法的関数が同じ回数だけ0と ∞ になるという定理は，また特に $\mathfrak{F}$ 上で一意の，真性特異点をもたない関数 f に対していつでも正しい. a を任意の定数とし，f の代りに $f-a$ にこの定理を適用すれば，つぎのことがわかる：$\mathfrak{F}$ 上で一意の，極を除いて正則な関数は，すべての値を，∞ も含めて，同じ回数だけとる.

$p=0$ の場合は，第2種積分 $\tau_\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{F}$ 自身の上で一意である；その結果，これは1位の極をただ一つもつに過ぎないから，すべての値を一回だけとり，$\mathfrak{F}$ を球面の上へ等角に写像する：球面は示性数0をもつただ一つのリーマン面である.

ここでわれわれは，加法的関数や乗法的関数のなかの特殊な場合として，$\mathfrak{F}$ 上の一意関数がどのような位置を占めるかを一般的に調べなければならない；すなわち，式(40)と(41)が $\mathfrak{F}$ 上の一意関数を与えるための条件を確立したい. このことを通じてわれわれはリーマン-ロッホ(Riemann-Roch)の定理ないしアーベルの定理へ導かれるであろう. われわれは(40)から始めることにし，まず表現を簡単にするため，単純な極ばかりであるとしよう. それゆえ $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_m$ は m 個の互いに異なる $\mathfrak{F}$ 上の任意の点であるとする. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_m$ においてたかだか1位の極をもち，それ以外のところで正則な関数は，つぎの形でなければならない：

$$f = (a_1\tau_{\mathfrak{p}_1} + a_1'\tau_{\mathfrak{p}_1}') + (a_2\tau_{\mathfrak{p}_2} + a_2'\tau_{\mathfrak{p}_2}') + \cdots \tag{42}$$

$$\cdots+(a_m\tau_{\mathfrak{p}_m}+a_m'\tau_{\mathfrak{p}_m}')+(b+ib');$$

ただし a_h, a_h'; b, b' は実の定数を表わす．一つの標準切断に属する $2p$ 個の回帰切断線 α_l に対して，f の $2p$ 個の周期が消えなければならないという条件により，a_h, a_h' に対する $2p$ 個の同次一次方程式が実係数で与えられ，これらの方程式は，$m>p$ であるとき，全部は消えない定数 a_h, a_h' によって確かに満たされうる．

それゆえ $\mathfrak{F}$ 上に p 個より多くの点を任意にあらかじめ与えるとき，たかだかこれらの点だけで1位の極をもち，その他のところで正則な $\mathfrak{F}$ 上の一意関数が定数以外に存在する．このことから特に，すべての閉じたリーマン面の上で，定数でない一意の，極を除いて正則な関数の存在することが確かめられた．

$\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, …, $\mathfrak{p}_r$ は $\mathfrak{F}$ 上の互いに異なる任意の r 個の点であるとし，$m_1, m_2, \cdots, m_r$ はそれらに対応させられた整数(>0 または $=0$ または <0)であるとするとき，これらの点 $\mathfrak{p}_h$ で少なくとも位数 m_h をもち($h=1, 2, \cdots, r$)，その他のところで正則な $\mathfrak{F}$ 上の関数あるいは微分を，**因子**(Divisor)

$$\mathfrak{d}=\mathfrak{p}_1^{m_1}\mathfrak{p}_2^{m_2}\cdots\mathfrak{p}_r^{m_r}$$

の**倍数**(Multiplum)[1]といい表わす．このような因子——有限個の点とそれらに対応する位数(指数)をひとまとめにして構成された記号——を使って，乗法と除法に関し，普通の分数の場合と同じように計算することを規約すると都合がよい．指数の和 $\sum_{h=1}^{r} m_h=m$ をこの因子の**総位数**(Gesamtordnung)と呼ぶ．いま述べたばかりの定理は，このときつぎのように一般化される：

因子 $\mathfrak{d}$ の総位数 m が p より小さくなければ，$\mathfrak{F}$ 上の一意関数のうちに $\dfrac{1}{\mathfrak{d}}$ の倍数が存在する；しかも(複素数の意味で)線形独立なものが少なくとも $m+1-p$ 個存在する．

実際，指数 m_h のうち，最初の s 個が正であり，残りが負であるとすれば，$\mathfrak{p}_h$ の真上でたかだか m_h 位の極をもち($h=1, 2, \cdots, s$)その他のところで正則な加法的関数は，$2\left(1+\sum_{h=1}^{s} m_h\right)$ 個の実の定数に依存し，これらに対して同次線

1) この言葉づかいは Hensel と Landsberg による代数関数の数論的理論に由来する；Hensel と Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, Leipzig (Teubner) 1902 を参照.

形である．この加法的関数のすべての周期が消えなければならないという要求から，これらの定数に対して $2p$ 個の実の同次一次方程式が与えられ，この関数が点 $\mathfrak{p}_{s+1}, \cdots, \mathfrak{p}_r$ でそれぞれ $-m_{s+1}, \cdots, -m_r$ の位数で消えなければならないという要求から，さらに $2\sum_{h=s+1}^{r}(-m_h)$ 個の同様な方程式が加わる．未知数の個数が方程式の個数を越えた残り

$$2\left(1+\sum_{h=1}^{s} m_h\right)-2p-2\sum_{h=s+1}^{r}(-m_h) = 2(m+1-p)$$

によって，(実数の意味で)線形独立な解の系の個数に対する下の限界が与えられる．

しかしながら，この問題に対する完全な解答はリーマン-ロッホの定理[1]によってはじめてもたらされる．最も見とおしのよい例としてもう一度“整の”，単純な点ばかりから構成された因子

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_m$$

をとり上げよう．回帰切断線 α_h に対して(42)の周期が消えることを要求する $2p$ 個の同次一次方程式は，§16 の(II_0)により，

$$\sum_{l=1}^{m}\left(a_l\Re\frac{dw_h(\mathfrak{p}_l)}{d\mathfrak{p}_l}+a_l'\Im\frac{dw_h(\mathfrak{p}_l)}{d\mathfrak{p}_l}\right) = 0, \tag{43}$$
$$(h = 1, 2, \cdots, 2p)$$

と書き表わされる．この方程式系の“階数”が $=2R$ であるならば(すなわち，$2m$ 個の未知数 a_l, a_l' に対するこれら $2p$ 個の方程式のうち，線形独立なものの個数が $2R$ であるならば)，$\dfrac{1}{\mathfrak{d}}$ の倍数になるような $\mathfrak{F}$ 上の関数のうちに，複素数の意味で線形独立なものが正確に

$$A = m+1-R$$

個存在する．(43)に対する“転置”方程式系(そこでは行が列に，列が行になっている)は，その実の未知数を $b_h (h=1, 2, \cdots, 2p)$ で表わすとき，つぎのように書かれる：

1)　Riemann はいわゆる“一般の”場合(この本文の記号で $R=p$ の場合)だけを考察した；すべての整の因子 $\mathfrak{d}$ に対して例外なく成り立つ結果は，G. Roch, Crelles Journal, **64**(1865), 372–376 ページによる；分数の因子は Klein(Riemannsche Fläche I, autographierte Vorlesung, Göttingen 1892, 110–111 ページ), E. Ritter(Math. Ann. **44**, 1894, 314 ページ), Hensel と Landsberg(前掲書，特に 362–364 ページを参照)によって考察の対象とされた．

$$\Re\left(\sum_{h=1}^{2p} b_h \frac{dw_h(\mathfrak{p}_l)}{d\mathfrak{p}_l}\right)=0,$$

$$[l=1,2,\cdots,m]$$

$$\Im\left(\sum_{h=1}^{2p} b_h \frac{dw_h(\mathfrak{p}_l)}{d\mathfrak{p}_l}\right)=0.$$

これの階数は同じ：すなわち $2R$ であり，したがってこれの線形独立な解の系 $\{b_h\}$ の個数は $2p-2R$ である．ところでこのことは，点 $\mathfrak{p}_l (l=1,2,\cdots,m)$ で消える第1種微分のうち(複素数の意味で)線形独立なものの個数 B が

$$B=p-R$$

であることをいっている．こうして確かめられた関係

$$A=B+(m+1-p)$$

がリーマン－ロッホの定理の内容をつくっている．これによって，個数 A を定めるという問題は事実上解決されるというわけでは決してないけれども，本質的に一そう簡単な問題に帰着させられる．なぜなら，第1種微分のつくる線形空間に個数 B が関係するのであるが，明らかにこの系は，面上の関数の系よりもはるかに複雑でないからである．さらにわれわれはすぐあとで，$m>2p-2$ ならばつねに $B=0$ と置かなければならないことを知るであろう；第1種微分の零点の総位数は $2p-2$ を越えることができないからである．また最後に，リーマン－ロッホの定理によって関数と微分のあいだに成り立つ可逆性はそれ自身注目に値するとともに興味深い事実である．いずれにせよこの定理は，閉じたリーマン面上の関数の本性に一そう深く立ち入るための出発点として，最も重要なものの一つである．

因子 $\mathfrak{d}$ が分母(負の指数)を含み，またそのなかに重複点(指数 >1 または <-1)が現われるときには，他の部分における証明の手続きをもとのままにしておくために，前節の等式(II)および場合によっては$(\mathrm{II}_0{}^n)$, (II^n)をも引用することが必要になる[1)]．結果は同様である．われわれはそれをつぎのようにい

1) Klein と Hensel–Landsberg におけるさきに挙げた場所を参照せよ．E. Ritter は前掲書でつぎのように推論している：$f_0=\frac{\mathfrak{d}'}{\mathfrak{d}}$ が $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ の倍数($\mathfrak{d}'$ が整)となるような一つの関数であるならば，私はこのようなすべての関数 f をつぎのようにして得る：$f=f_0\cdot f'$, f' は $\frac{1}{\mathfrak{d}'}$ の倍数；私はこれによって整の因子 $\mathfrak{d}'$ の場合に戻る．しかしながらここでは，$[B+(m+1-p)>0$ であるとき$]$ 一般に一つの f_0 が存在するという証明が欠けている．

い表わすことができる：

（リーマン-ロッホの定理） 総位数 m をもつ任意の因子 $\mathfrak{d}$ の倍数となる微分のうち（複素数の意味で）線形独立なものの個数 B と，逆因子 $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ の倍数となる $\mathfrak{F}$ 上の一意関数のうち線形独立なものの個数 A とのあいだには，

$$A = B + (m + 1 - p)$$

という関係が成り立つ．

すでに見たように，$m > p$ であるときには，$\mathfrak{F}$ 上で一意の，定数でない関数のうちに $\frac{1}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_m}$ の倍数がいつでも存在する．$m \leqq p$ の場合，一般には，すなわち m 個の点 $\mathfrak{p}_l$ が特殊な位置にあるときを除けば，このような倍数が存在しないということをつけ加えよう．このことによって示性数 p の関数論的な意味がもう一度明るい光のなかに浮かび上がる．$\mathfrak{F}$ 上の関数のうちに定数でない $\frac{1}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_p}$ の倍数が存在するのは，リーマン-ロッホの定理により，点 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_p$ において消える（しかし恒等的には消えない）第1種微分 dw が存在するときであり，またそのときに限る．それゆえ

$$dw_1^*, \quad dw_2^*, \quad \cdots, \quad dw_p^*$$

が第1種微分に対する複素基底を意味するとき，全部は消えない複素数 c_1^*，c_2^*，$\cdots$，c_p^* を求めて，

$$c_1^* dw_1^* + c_2^* dw_2^* + \cdots + c_p^* dw_p^*$$

が上記の p 個の点で零点をもつようにしなければならない．互いに異なる p 個の任意の点 $\mathfrak{p}_1^0, \mathfrak{p}_2^0, \cdots, \mathfrak{p}_p^0$，これらに属する局所一意化変数 z_h，また各 $\mathfrak{p}_h^0$ に対して一つの z_h 円板 $K_h : |z_h| \leqq a_h\ (h=1, 2, \cdots, p)$ を選び，これらの円板は互いに相手のなかへ侵入しないようにしておこう．K_h のなかの点 $\mathfrak{p}_h$ の一つ一つの位置に対して，点 $\mathfrak{p}_h$ において同時に消える第1種微分が存在すると仮定すれば，$z_1, z_2, \cdots, z_p\ (|z_h| \leqq a_h)$ について恒等的に

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} \frac{dw_1^*(z_1)}{dz_1} \cdots\cdots \frac{dw_p^*(z_1)}{dz_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dw_1^*(z_p)}{dz_p} \cdots\cdots \frac{dw_p^*(z_p)}{dz_p} \end{vmatrix} = 0$$

でなければならない．しかしこのことは微分 dw_h^* の線形独立性と矛盾する．実際，$\Delta=0$ において z_1 を変数とみなし，$z_2, \cdots, z_p$ はしばらく固定されていると考えれば，p 個の微分 $dw_h^*(z_1)$ のあいだの同次一次関係式が得られ，それは z_1 について恒等的に満たされる；それゆえこの関係式の各係数，すなわち Δ の残りの $p-1$ 個の行からつくられる小行列式はすべて個々に消えなければならず，しかもそれらは $z_2, \cdots, z_p$ について恒等的に消える．この推論を繰り返し，今度はそれを Δ の代りに上記の $(p-1)$ 次の小行列式に適用し，こうして一歩一歩進めば，最後には一番下の行の要素，すなわち微分 dw_h^* そのものが恒等的に $=0$ であるという不合理な主張に到達する．

各点 $\mathfrak{p}$ に対して，式

$$d\tau_{\mathfrak{p}}-id\tau_{\mathfrak{p}}'=dw_{\mathfrak{p}}$$

により一つの第1種微分を得る[1]．これは，この種の微分を第2種微分からつくり出す方法としてきわめてわかりやすい；ただ問題になるのは，これらが第1種微分に対して完全な基底を与えるほど広いかどうかということである．この問に対してわれわれはいま肯定的に答えることができる．そのために，私は $\dfrac{1}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_p}$ の倍数になる $\mathfrak{F}$ 上の一意関数≠定数 が存在しないように p 個の点 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_p$ を選ぶ；そうすればこれらに対応する $dw_{\mathfrak{p}_1}, dw_{\mathfrak{p}_2}, \cdots, dw_{\mathfrak{p}_p}$ は第1種微分の複素基底をつくる．実際，

$$C_1dw_{\mathfrak{p}_1}+C_2dw_{\mathfrak{p}_2}+\cdots+C_pdw_{\mathfrak{p}_p}=0$$

という関係が成り立つとすれば，$\mathfrak{F}$ 上のすべての閉じた道 α に対して，

$$\sum_{h=1}^{p} C_h\left(\int_\alpha d\tau_{\mathfrak{p}_h}-i\int_\alpha d\tau_{\mathfrak{p}_h}'\right)=0$$

である．この等式から，たとえば虚部だけを残そう $(c_h=\Re C_h,\ c_h'=\Im C_h)$：

$$\sum_{h=1}^{p}\left(c_h\int_\alpha d\tau_{\mathfrak{p}_h}+c_h'\int_\alpha d\tau_{\mathfrak{p}_h}'\right)=0,$$

こうすれば，

$$\sum_{h=1}^{p}(c_h\tau_{\mathfrak{p}_h}+c_h'\tau_{\mathfrak{p}_h}')$$

1)　$\mathfrak{p}$ に属する局所一意化変数の選び方を変えることによって及ぼされる効果は，これに一つの定数因数が掛けられるということだけである；それゆえこれは本質的に $\mathfrak{p}$ だけによって定められると考えることができる．

がこの面の上の一意関数でなければならないということが示される.

この面の上の関数を得るには，二つの道がわれわれに開かれている：一つは加法的関数を適当な定数により線形に結合して，その周期を消してしまう方法——もう一つは二つの微分の一方で他方を割る方法[1]である．両方の可能性を組み合わせることによって，われわれはいくつかの重要な定理に到達する．まずつぎのことに注意しよう：二つの微分の商は $\mathfrak{F}$ 上の関数であるから，

1) 各微分はこれを表現する因子，すなわちその分子には微分の零点が重複回数だけ書かれ，その分母は極を与えるような因子により，定数因数を除いて一意的に定められ——また

2) この表現因子の総位数 d はすべての微分に対して同じである；d は各第1種微分の零点の個数であり，したがって $p>0$ のときは確かに $\geqq 0$ である．各リーマン面に対するこの重要な不変量は示性数 p だけに依存し，しかも簡単な等式

$$d = 2p-2$$

によって定められることを証明しよう.

$\mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ はそれぞれ総位数 m, n をもつ二つの因子であり，それらの積 $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ が $\mathfrak{F}$ 上の微分 dv を表現するものとする：すなわち $m+n=d$. $\mathfrak{d}$ の倍数のうちには線形独立な微分がちょうど M 個，$\mathfrak{e}$ の倍数のうちにはそのような微分が N 個あるとしよう．$\mathfrak{F}$ 上の一意関数のうち，われわれは $\dfrac{1}{\mathfrak{d}}$ の倍数 f の全体に注目する．それらを加法的関数の結合によってつくり出すことにすれば，リーマン-ロッホの定理から，線形独立な f の個数は

$$= m+1-p+M$$

であるという結果が与えられる．各 f に対して微分 fdv は $\mathfrak{e}$ の倍数である；すなわち第二の方法をとり，$\mathfrak{e}$ の倍数であるすべての微分を dv で割ることによって，関数 f が残らず得られる．いま個数だけに注意すれば，このことから

$$N = m+1-p+M$$

1) ここに述べたあとの方法はまた開いたリーマン面にも適用することができ，これによれば単なる定数になってしまわない面上の関数に対する存在定理がここでただちに与えられる．Koebe, Crelles Journal, **139** (1911), 291 ページ以下をも参照.

という関係が出て来る．同様にして

$$M = n+1-p+N.$$

これら二つの等式を加えれば

$$d = 2p-2,$$

差をとれば，Brill-Noether の相互定理(Reziprozitätssatz)：[1)]

$$M-N = 2(n-m)$$

が得られる．

これらの考察はいずれも本来“部分分数分解”(40)に結びついているが，その方はこれだけで十分である！ われわれは“積表現”(41)に移ろう．S に対応する

$$\Theta = \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_r}$$

の乗数 μ_S を計算するために，$\mathfrak{F}$ 上に $\mathfrak{p}_h, \mathfrak{q}_h$ を通らない閉曲線 α をとり，これによって $\hat{\mathfrak{F}}$ 上では点 $\hat{\mathfrak{p}}$ が点 $\hat{\mathfrak{p}}S$ に導かれるものとし，さらに α と出会わない積分の道 $\mathfrak{p}_h\mathfrak{q}_h$ をひく．こうすれば§16 の(Ⅲ$_0$)により，

$$(44)\qquad \mu_S = \prod_{h=1}^{r} e^{\int_\alpha d\omega_{\mathfrak{p}_h\mathfrak{q}_h}} = \prod_{h=1}^{r} e^{-2\pi i\cdot\Re\int_{\mathfrak{q}_h}^{\mathfrak{p}_h} dw_\alpha} = \prod_{h=1}^{r} \frac{\chi_S(\mathfrak{p}_h)}{\chi_S(\mathfrak{q}_h)}$$

である．ここで任意の因子

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1{}^{m_1}\mathfrak{p}_2{}^{m_2}\cdots\mathfrak{p}_r{}^{m_r}$$

の**積分指標**として，

$$\chi_S(\mathfrak{d}) = \chi_S(\mathfrak{p}_1)^{m_1}\cdot\chi_S(\mathfrak{p}_2)^{m_2}\cdot\cdots\cdot\chi_S(\mathfrak{p}_r)^{m_r}$$

という量を導入するのは自然な考えである．こうすれば等式(44)はつぎの言葉でいい表わされる[2)]：

関数 Θ の乗数は表現因子の積分指標と一致する．

特に($\mu_S=1$)：

あらかじめ与えられた点 $\mathfrak{p}_h, \mathfrak{q}_h$ $(h=1, 2, \cdots, r)$ がそれぞれ，$\mathfrak{F}$ 上で一意の或る

1) A. Brill と M. Noether, Mathematische Annalen, 7(1874), 283 ページ.
2) Appell, Acta Mathematica, 13(1890), 懸賞当選論文の 13–14 ページを参照.

関数のすべての零点とすべての極になるのは，零点の積分指標の積が極の積分指標の積に等しいとき，すなわち

$$\prod_{h=1}^{r} \chi_S(\mathfrak{p}_h) = \prod_{h=1}^{r} \chi_S(\mathfrak{q}_h)$$

となるときであり，またそのときに限る．

積分指標の意味に戻り，一定の標準切断 α_h およびそれに対応する第1種積分の実基底 $dw_{\alpha_h}=dw_h$ を使えば，上記の条件をつぎの $2p$ 個の等式に置き換えることができる：

$$\sum_{l=1}^{r} \Re\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_l} dw_h - \sum_{l=1}^{r} \Re\int_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_l} dw_h = n_h \qquad (n_h \text{ は整数})$$

$$[h = 1, 2, \cdots, 2p].$$ [1)]

この場合，積分の道 $\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_l$, $\mathfrak{q}_0\mathfrak{q}_l$ はとりあえず任意である．しかしあとからこれらの積分の道の一つ，たとえば $\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1$ を動かし，その旧位置と新位置とを合わせてつくられる閉曲線が

$$(n_1\alpha_2 - n_2\alpha_1) + \cdots + (n_{2p-1}\alpha_{2p} - n_{2p}\alpha_{2p-1})$$

と位相合同になるようにすれば，すぐ上の等式の右辺にある整数はこれによって0にかえられる．こうしてつぎの定理が得られる：

（アーベルの定理）[2)] 点 $\mathfrak{p}_h, \mathfrak{q}_h [h=1, 2, \cdots, r]$ がそれぞれ $\mathfrak{F}$ 上の或る一つの関数のすべての零点とすべての極になるのは，各第1種積分 w に対して——$\mathfrak{p}_h, \mathfrak{q}_h$ に至る積分の道を適当に，w とは無関係に選ぶとき——

---

1)（訳注） $\mathfrak{p}_0=\mathfrak{q}_0$ であろう．

2) ここで私が使う名称が完全に妥当なものであるとはいえない．Abel によって得られたのは，ここに述べる条件が必要であるという定理だけである；しかしながら他方 Abel によって提出された定理［短いノート "Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes," Crelles Journal, 4(1829), 200–201 ページ＝全集，新版(1881)，第 I 巻，515–517 ページのなかで，彼が壮大な単純さをもって展開した定理］は，彼が第1種積分だけに限定したとり扱いをしなかった点で一そう一般的である．本書の 156 ページを参照．Abel によって 1826 年にパリのアカデミーに提出されたこの対象に関する論文 "Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes" は Cauchy の過失により長らく見失われ，Abel の死後はじめて公表された：Mémoires présentés par divers savants，第 VII 巻(1841)＝Abel，全集，新版(1881)，第 I 巻，145–241 ページ．さらにこの定理はアーベルの残した草稿 "Sur la comparaison des fonctions transcendentes"，全集，第 II 巻，55–66 ページに含まれている．第1種積分に対する Abel の定理の逆は Riemann においても行間に見られるが，Clebsch によってはじめて明確な形に（十分に行き届いた証明を付けずに）述べられ(Crelles Journal, 63(1864)，198 ページ)，また彼により代数曲線論のなかできわめて有効に利用された．

$$\sum_{h=1}^{r} w(\mathfrak{p}_h) = \sum_{h=1}^{r} w(\mathfrak{q}_h)$$

という関係が成り立つときであり，またそのときに限る.

dv_1, dv_2 は $\mathfrak{F}$ の上で極を除いて正則な任意の二つの微分であり，$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ はそれらを表現する因子であるとすれば，$\dfrac{dv_1}{dv_2} = \dfrac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}$ は $\mathfrak{F}$ 上の関数であるから，アーベルの定理により

$$\chi_S\left(\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}\right) = \frac{\chi_S(\mathfrak{d}_1)}{\chi_S(\mathfrak{d}_2)} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \chi_S(\mathfrak{d}_1) = \chi_S(\mathfrak{d}_2)$$

である．それゆえつぎのようなアーベルの定理の系を得る：

$\mathfrak{F}$ 上のすべての微分あるいはそれの表現因子に対して，積分指標は同じ値 $\chi_S{}^0$ をとる．全位数 $2p-2$ の因子 $\mathfrak{d}$ が或る微分の表現となるのは，その積分指標が指標系 $\chi_S{}^0$ と一致するときであり，またそのときに限る.

アーベルの定理に関して，とりあえず $p=1$ の場合における一つの応用を行なってみよう．この場合，定数因数を除けばただ一つの第1種微分 dw しか存在しない．いろいろな積分の道に対応して，$w(\mathfrak{p})$ が一点 $\mathfrak{p}$ においてとりうる値は，複素 w 平面において平行四辺形状の点格子をつくる．$\mathfrak{F}$ に属する個々の点 $\mathfrak{p}$ に対応して現われるすべての格子は，互いに平行移動によって移りうる；あるいは——こういいたいと思う——同じ“配置と形態” Λ をもっている．この配置と形態をもつ格子の一つ一つを“点”と解釈することによって，w 平面は一つの閉じたリーマン面 $\mathfrak{F}_\Lambda$ に変わる(32 ページを参照)．もしも $\mathfrak{F}$ 上の異なる二点 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ に同じ格子が対応すると仮定すれば，アーベルの定理により，$\mathfrak{p}$ においてだけ1位の極をもつ(そして $\mathfrak{q}$ において 0 となる) $\mathfrak{F}$ 上の関数が存在することになる；この関数はこの面を両方から一意に，そして等角に球面の上へ写像しなければならないが，それは $p=1$ と矛盾する．それゆえ異なる点 $\mathfrak{p}$ にはつねに異なる格子 $w=w(\mathfrak{p})$ が対応する．したがってどの点においても，dw は 0 になることができない；これはまたわれわれの一般的な公式 $d=2p-2$ からも $p=1$ のとき導かれることである．それゆえ $\mathfrak{F}$ は多様体 $\mathfrak{F}_\Lambda$ の或る領域 $\mathfrak{G}$ の上へ両方から一意に，両方から領域連続に(その上等角に)写像される．$\mathfrak{F}$ は閉じているから，$\mathfrak{G}$ も閉じており，したがって $\mathfrak{F}_\Lambda$ 全体と同じものでなければならない：$\mathfrak{F}_\Lambda$ は与えられたリーマン面に等角同型であり，これを示性数1の

リーマン面の標準形ということができる. w 平面は $\mathfrak{F}_\Lambda$ に対して“積分関数の被覆面”であり(実際, w 自身が一つの積分関数である), 同時にまた, 平面は単連結であるから, “普遍”被覆面でもある. w は基礎面 $\mathfrak{F}$ 上の関数に対して一つの一意化変数である; すなわちこれらすべての関数は, 単葉な平面のなかを動く複素変数 w の一意関数として表わされ, しかもこの表現はここで——一つの Λ 格子に属するすべての点 w に対して, $w=w(\mathfrak{p})$ により同じ点 $\mathfrak{p}$ が対応するという事情の現われとして——二重周期関数, すなわちいわゆる楕円関数によって行なわれる. 示性数1の二つのリーマン面は, これらの標準形を $\mathfrak{F}_{\Lambda'}, \mathfrak{F}_{\Lambda''}$ とすれば, 形態 Λ' および Λ'' をもつ格子がユークリッド的に相似であるとき, またそのときに限って等角同型である.

$p=1$ の場合に楕円関数によって解かれる“逆問題”は, 任意の示性数 p をもつ面 $\mathfrak{F}$ に対してもつぎのような形で成立する: $dw_h{}^*[h=1, 2, \cdots, p]$ が $\mathfrak{F}$ 上の第1種微分の複素基底であるとき, あらかじめ任意に与えられた数 $\digamma_1, \cdots, \digamma_p$ に対して, (積分の道を適当に選ぶとき)

$$(45) \qquad \sum_{l=1}^{p} w_h{}^*(\mathfrak{p}_l) = \digamma_h \qquad [h = 1, 2, \cdots, p]$$

となるように, $\mathfrak{F}$ 上の点 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_h$ を見いだすこと. この逆問題はヤコビにより, アーベルの定理に関連して提出され, Göpel と Rosenhain による重要な準備的労作ののちに, リーマンとワイヤストラスにより ϑ 関数——p 個の変数 $\digamma_h$ の或る超越整関数——を使って一般的な解決が得られた[1]. この問題はまた明らかにつぎのように定式化される: あらかじめ与えられた指標系 χ_S に対して,

$$(46) \qquad \chi_S(\mathfrak{p}_1)\cdot\chi_S(\mathfrak{p}_2)\cdot\cdots\cdot\chi_S(\mathfrak{p}_p) = \chi_S$$

となるような点 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_p$ を定めること; このときこれはアーベルの定理にならって, あらかじめ与えられた乗数 χ_S をもち, 点 $\mathfrak{p}_0$ においてだけたかだか

1) Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, Crelles Journal, **54**(1857)=全集, 第2版, 88–142ページ; Über das Verschwinden der Theta-Funktionen, Crelles Journal, **65**(1865)=全集, 212–224ページ. Weierstraß, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten, 全集, 第4巻. Stahl, Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig 1896. Prym と Rost, Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung, Leipzig 1911, 第2部, 第7章. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903.——逆問題の大きな意義はわれわれ現代人にとって単に問題そのものの価値のなかにあるばかりではなく(そしてまたそれが決して主要なものでもなく), Riemann や Weierstraß の壮大な一連の思想——逆問題を解決するための努力を通して, 彼らがその創造に駆り立てられた一連の思想——のなかにある.

p 位の極をもつ関数

$$\Theta=\frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_p}{\mathfrak{p}_0{}^p}$$

を見いだすという問題に同値である[1]. こうすれば, これは自然につぎの一般的な問題の設定に含まれる:

あらかじめ与えられた乗数 χ_S をもつ関数 Θ の全体は一つの線形空間 G_χ をつくる; すなわちこれらの関数を定数係数によって任意に線形に結合するとき, これらの範囲のそとへ出ない. $\mathfrak{d}$ が総位数 m の因子であるとき, G_χ のなかで $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ の倍数となるすべての関数, 特にそれらのうちの線形独立なものの個数 A を問題にする.

これは 138-141 ページにおいて "**主指標**" $\chi_S=1$ に対してとり扱ったのと同じ問題を一般の指標系 χ_S に対して考えることである. そこで得られた結果はそのまま移される; まず第一に, 不等式

$$A\geqq m+1-p,$$

このなかに, 特に($\mathfrak{d}=p_0{}^p, m=p$)逆問題の解決の可能性が横たわっている. すなわち $\Theta_0=\mathfrak{d}_0$ を G_χ に属する任意の関数とするとき——このような関数が存在するというのは一つの補助定理であるが, その証明はすぐあとで補うであろう——, $\mathfrak{F}$ 上の一意関数のうちに存在する $\frac{1}{\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0}$ のすべての倍数に Θ_0 を掛けることによって, G_χ のなかにある $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ の倍数が得られる. ところで $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0$ は $\mathfrak{d}$ と同じく総位数 m をもつから, 前者のうち線形独立なものの個数は $\geqq m+1-p$ である(138 ページを見よ).

さらに, 完全なリーマン-ロッホの定理の公式もまたただちに移される. そのためには乗法的関数と並んで, Prym 氏[2]によってこの理論に導入された乗法的微分を引用しなければならない. このような**乗法的微分**あるいは**プリムの微分** dT は, $\hat{\mathfrak{F}}$ 上で一意, 解析的であり, 真性特異点をもたず, $\hat{\mathfrak{F}}$ の被覆変換 S に対して等式

---

1) (訳注) (44)を見よ.

2) Crelles Journal, **70**(1869), 354-362 ページ; **71**(1870), 223-236 ページおよび 305-315 ページ. 136 ページに引用した Appell の論文, さらに: Prym と Rost, Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung, Leipzig 1911; R. König, Berichte der kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (mathematisch-physikalische Klasse), **63**(1911), 348-368 ページを参照.

$$dT(\hat{\mathfrak{p}}S) = \chi_S \cdot dT(\hat{\mathfrak{p}})$$

のように振舞う; ここで χ_S は絶対値 1 をもつ定数の乗数である. プリムの微分はいずれも一つの因子 $\mathfrak{t}$ で表わされる; すなわちその分子に重複度まで正しく書かれている点の真上には dT の零点があり, その分母は dT の極を表わすような因子である. プリムの微分を任意のアーベル(すなわち $\mathfrak{F}$ 上で一意の)微分で割った商は, プリムの微分と同じ乗数をもつ関数 Θ であるという事情から, 表現因子 $\mathfrak{t}$——これは全位数 $2p-2$ をもつ限り, 任意にあらかじめ与えることができる——によりプリムの微分 dT は定数因数を除いて一意的に定められるという結果が出て来る; dT の乗数は $=\chi_S(\mathfrak{t}) : \chi_S{}^0$ である. いま B の下に, 乗数 $\chi_S{}^{-1}$ をもち, $\mathfrak{d}$ の倍数であるようなプリムの微分のうち線形独立なものの個数を諒解すれば, 一般化されたリーマン-ロッホの定理[1]:

$$A = B + (m+1-p)$$

が成り立つ. 実際, B はアーベル微分のなかに見いだされる線形独立な $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0$ の倍数(これらからいま問題になっているプリムの微分に移るには Θ_0 で割ればよい)の個数と同じである. それゆえ χ_S の代りに $\chi_S{}^{-1}$ と書けば, この関係は

一方では, $\mathfrak{d}$ の倍数であり, 乗数系 χ_S をもつ微分のうち, 線形独立なものの個数 B と,

他方では, 逆の因子 $\dfrac{1}{\mathfrak{d}}$ の倍数であり, 逆の乗数系 $\dfrac{1}{\chi_S}$ をもつ関数のうち, 線形独立なものの個数 A と

のあいだに成り立つ.

この定理の特殊な場合を少なくとも一つ挙げるために, $\mathfrak{d}$ として 0 と異なる指数をもつ点が一つも含まれない因子 "1" をとろう; このとき, 極をもたない関数 Θ は定数以外にないから, $A=0$, そして主指標の場合にだけ $A=1$ とおかなければならない. それゆえ: あらかじめ与えられた乗数をもつプリムの第1種微分は $p-1$ 次元(主指標の場合にだけ p 次元)の線形空間をつくる.

---

1) 最初に定式化したのは E. Ritter, Math. Ann., 44, 314 ページである. ただし 140 ページの脚注を参照. Ritter は因子記号の方法の代りに, Klein によって基礎づけられたリーマン面上の形式の理論を用いた; これは乗法的形式の助けを借りて因子の実際の表現を可能にするものである; また彼は Math. Ann., 47 (1896), 157-221 ページにおいて, Riemann が線形微分方程式論に導入した基本的な諸定理に導かれ, 被覆変換 S を施すと線形同次に変換される n 個の形式の系にその研究を拡張した.

ここまでの考察において，われわれをささえてきたのはつぎの補助定理である：

補助定理：χ_S があらかじめ与えられた指標系であるとき，乗数が $=\chi_S$ となる関数 Θ はつねに存在する.

アーベルの定理にならって，このような関数

$$\Theta_0=\frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_n}{\mathfrak{q}_1{}^0\mathfrak{q}_2{}^0\cdots\mathfrak{q}_n{}^0}$$

を見いだすことは，

$$(47)\qquad \sum_{l=1}^{n}\{w_h{}^*(\mathfrak{q}_l)-w_h{}^*(\mathfrak{q}_l{}^0)\}=\text{あらかじめ与えられた値 }\mathcal{F}_h$$

$$[h=1,2,\cdots,p]$$

となるような点 $\mathfrak{q}_l,\mathfrak{q}_l{}^0$ $[l=1,2,\cdots,n]$ を求めるということから出て来る[1]. $\mathfrak{q}_1{}^0,\cdots,\mathfrak{q}_p{}^0$ は p 個の互いに異なる点であって，これら p 個の点で同時に消える第1種微分は存在しないように選ばれているとし(141 ページ)，z_l はこれらに属する局所一意化変数，K_l は $\mathfrak{q}_l{}^0$ のまわりの z_l 円板で，それらが重なり合うところはないとしよう. 関数行列式

$$\left|\frac{dw_h{}^*(z_l)}{dz_l}\right|_{z_1=0,\cdots,z_p=0}\neq 0$$

であるから，$\mathfrak{q}_l$ を未知数とする方程式系

$$(48)\qquad \sum_{l=1}^{p}\int_{\mathfrak{q}_l{}^0}^{\mathfrak{q}_l}dw_h{}^*=\mathcal{F}_h\qquad [h=1,2,\cdots,p]$$

に対して，あらかじめ与えられた値 $\mathcal{F}_h$ が十分小さいときには，$\mathfrak{q}_l$ が(積分の道 $\mathfrak{q}_l{}^0\mathfrak{q}_l$ とともに) K_l の内部に含まれるような解は一つ，そして一つだけ存在する. ところで $\mathcal{F}_h$ が任意の値である場合は，まず十分に大きな正の整数 N を選び，方程式(48)の右辺において $\mathcal{F}_h$ を $\dfrac{\mathcal{F}_h}{N}$ に置き換えるとき，上記のような解 $\mathfrak{q}_l$ $[l=1,2,\cdots,p]$ を求めうるようにする. このときには，(変形以前の)方程式系(47)に対してもまた一つの解が得られる；それには，$n=Np$ とし，列 $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_n$ のなかには $\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_p$ の各点が，列 $\mathfrak{q}_1{}^0\mathfrak{q}_2{}^0\cdots\mathfrak{q}_n{}^0$ のなかには $\mathfrak{q}_1{}^0\cdots\mathfrak{q}_p{}^0$ の各点がそれぞれ全体で N 回現われるようにすればよい.

1) (訳注) 144 ページ以下を参照.

上に見たように，逆問題(46)はつねに解をもつ；ところがまた一般にはただ一つの解しかもたない．実際，一般化されたリーマン-ロッホの定理により，この解が多意(無限多意)になるのは，乗数 χ_S^{-1} をもち，点 $\mathfrak{p}_0$ において少なくとも p 位の零点をもつプリムの微分

$$dT = \mathfrak{p}_0{}^p \cdot (\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_{p-2}) = \mathfrak{t}$$

が存在するときに限る；しかしこのときには

$$\chi_S = \frac{\chi_S{}^0}{\chi_S(\mathfrak{t})} = \chi_S{}^0 : \prod_{i=1}^{p-2} \chi_S(\mathfrak{q}_i)$$

である．考えうる指標系の全体がつくる $2p$ 次元の多様体のなかで，この公式から得られる指標系は，$\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_{p-2}$ が互いに独立に $\mathfrak{F}$ 上を動くとき，単に $(2p-4)$ 次元をもつ一つの多様体 X をつくり，これが逆問題に対して特異形体(singuläres Gebilde)の役割を果たす[1]．

χ_S が主指標と異なる任意の指標系であるとき，われわれは点 $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_{p-2}$ を適当にとって，乗数 χ_S をもち，これらの点で消えるプリムの第1種微分

$$dT = (\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_{p-2}) \cdot (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_p)$$

が(定数因数を除けば)ただ一つだけ存在するようにできる——それは，プリムの第1種微分が $(p-1)$ 次元の空間をつくるという定理による．このように選べばその結果として，方程式

$$\prod_{l=1}^{p} \chi_S(\mathfrak{p}_l) = \chi_S \cdot \left(\chi_S{}^0 : \prod_{i=1}^{p-2} \chi_S(\mathfrak{q}_i)\right)$$

がただ一組の解 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_p$ をもつ，すなわち，この方程式の左辺にある指標系は特異でないということが出て来る．これに反して右辺の括弧のなかに書かれた分数は X に属する．したがって，プリムの第1種微分が $p-1$ 個しかないということは，逆問題の言葉を使えば，つぎの定理に同値である：

特異形体 X は，これに属するすべての指標系に一つの決まった指標系 χ_S を掛けることによって，決してそれ自身に移らない(もちろん $\chi_S=1$ という自明の場合は除く)．

逆問題と乗法的な関数および微分の理論との関連を明らかにするには，これ

1) $p=1$ の場合，一般に X は存在しない(146 ページ)；$p=2$ の場合にはただ一つの指標系 $\chi_S{}^0$ から成る．

だけでよいと思う．解析的には，ヤコビの問題の解決はつぎのような方法で始められるであろう：$\mathfrak{F}$ 上で一意の，極を除いて正則な任意の関数 $f(\mathfrak{p})$ を補助手段にとり，そして点 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_p$ そのものの代りに，これらの点 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_p$ における関数 f の値を，(45) から $F_1, F_2, \cdots, F_p$ に依存するものとして調べてゆく．しかしこれらの量 $f(\mathfrak{p}_1), f(\mathfrak{p}_2), \cdots, f(\mathfrak{p}_p)$ はその順序を除いてしか定まらないから，これらをその基本対称関数，すなわち数

$$\lambda = f(\mathfrak{p}_1), f(\mathfrak{p}_2), \cdots, f(\mathfrak{p}_p)$$

を根とする p 次方程式

$$\lambda^p + A_1\lambda^{p-1} + \cdots + A_p = 0$$

の係数に置き換えるのが一そう適切である．これらの係数 A_h を $F_1, F_2, \cdots, F_p$ によって表わすとき，A_h はヤコビの提案によって**アーベル関数**とよばれるものである．値の系 $(F) = (F_1, F_2, \cdots, F_p)$ のつくる $2p$ 次元の F 空間全域のなかでわずかに $(2p-4)$ 次元の形体を構成している特異な値の系を除けば，そこでアーベル関数は一意かつ正則-解析的である．さらにそれらは $(2p)$ 重に周期的である．実際，$\alpha_l\ [l=1, 2, \cdots, 2p]$ は $\mathfrak{F}$ 上の閉じた道の基底であるとし，

$$a_h{}^l = \int_{\alpha_l} dw_h{}^*$$

とすれば，指数 l の値の一つ一つに対する数 $a_1{}^l, a_2{}^l, \cdots, a_p{}^l$ はアーベル関数 $A((F))$ の周期系をつくる：すなわち

$$F_1, F_2, \cdots, F_p \text{ に対して恒等的に } A((F+a^l)) = A((F))$$

であり，これら $2p$ 個の周期系は，

$$\Re a_1{}^l,\ \cdots,\ \Re a_p{}^l,\ \Im a_1{}^l,\ \cdots,\ \Im a_p{}^l$$

を第 l 行とする行列式が 0 でなくなるという意味で線形独立である．ここで逆問題の解決可能性に対して述べた証明を具体的に実行すれば，F 空間の有限な各領域

$$|F_1| < M,\ |F_2| < M,\ \cdots,\ |F_p| < M$$

において，アーベル関数 $A((F))$ は二つの関数の商として表わされ，それら二つの関数はこの有限領域において正則-解析的である[1]という結果に到達する．特異な値の系 (F) に対する不定性は，上に述べた表現の分子と分母がこの系に

1) Weierstraß, 全集, 第 4 巻, 451–456 ページを参照.

対してともに消えるということから生ずる．不定になる場所からつくられた点集合は，アーベル関数の周期性から当然の結果として生ずる移動を除けば，それ自身へ移るような移動を一つも許さない．——そればかりでなく，リーマンとワイヤストラスによるきわめて透徹した分析を通じて，これらのアーベル関数は有限領域の上に限らなくても，二つの超越整関数——これがすなわち ϑ 関数である——の商として表わされることが示され，また彼らは ϑ 関数に対し，強く収束する無限級数の形で，一つの具体的な解析的表現を与えたのである．これらの ϑ 関数はまた，p 個の独立な複素変数をもつ $2p$ 重周期関数の一般論を基礎づけるのに十分であり，この理論から見ればアーベル関数論は一つの特殊な場合に過ぎない[1]．——

この長い節において得られた認識を振り返って眺めるとき，われわれは何よりもまず数 p のもつ高度の関数論的意義に関する確信をおさえることができない；それにもかかわらずこの数はその根源とその本質によって位置解析の量であり，またあり続ける．関数論という国の組織における法秩序は細部において錯綜し，その展望は必ずしも容易でないけれども，それを支配する単純な基本線は，微光のようにいたるところに滲透しており，それはまさしくすべての人々に，関数論的現実の上空に漂う目に見えない“立法の女神”に立ち帰るように，位置解析に立ち帰ることを教える．

しかしながら，本来関数論的な事項についていうならば，われわれは二つの思想圏と係わり合って来た；それらはおおよそ

加法的関数，部分分数分解，リーマン-ロッホの定理——

乗法的関数，積表現，アーベルの定理

という標語によってもう一度互いに比較対照されよう．これら二つの思想圏は $\mathfrak{F}$ 上の一意関数の理論において融合するが，その建設はここから§16において得られた相互法則を使って容易に実行される．しかしこうして組み立てられた体系の意味は，一つの閉じたリーマン面上の，特異点をもたない一意関数の系を，つぎの節において行なわれるように，さらに第三の視点から代数関数体として知るに至ったとき，はじめて白日のもとにさらされるであろう；なぜな

1) Krazer の Lehrbuch der Thetafunktionen (Leipzig 1903) の第4章を参照，ちょうどここにはまた一そう多くの文献が挙げられている．

らこの立場に立ってはじめて，これらの関数はいままでとは異なるわれわれの興味，すなわち——これらが平面上の，あるいはもっと高い次元を与えられた空間内の代数曲線の理論に関係する限りにおいて——代数的かつ幾何学的な興味と密接に結合した姿を表わすからである.

§18. 代数関数体.

z は与えられた閉リーマン面 $\mathfrak{F}$ の上の関数であって，定数に退化せず，すべての値を n 回とるものとしよう. z が値 a をとる $\mathfrak{F}$ 上の点 $\mathfrak{p}$ について，それは z 球面の点 $z=a$ の真上にあるということによって，$\mathfrak{F}$ を z 球面の真上に n 葉に拡がっている被覆面とすることができる. z が値 a をとる n 個の点 $\mathfrak{p}$ が全部は互いに異ならないとき，そのような有限個の値 a の真上には，もちろん被覆面の点は n 個より少ししかない. 点 $\mathfrak{p}_0$ において関数 z が有限の値 a を r 回とるならば，$\sqrt[r]{z-a}$ は $\mathfrak{p}_0$ に属する一つの局所一意化変数であり，a の真上にある点 $\mathfrak{p}_0$ は位数 $r-1$ の分岐点である. $\mathfrak{U}$ を $\mathfrak{p}_0$ の任意の近傍とするとき，z 球面上に適当な円板 $|z-a|\leqq\varepsilon$ をとれば，この円板の各点の真上に(中心点の真上は別として)近傍 $\mathfrak{U}$ に属する $\mathfrak{F}$ の点がちょうど r 個ある. dz は $\mathfrak{p}_0$ において $(r-1)$ 位の零点をもつ. z が点 $\mathfrak{p}_0$ において値 ∞ を s 回とるならば，$\sqrt[s]{\dfrac{1}{z}}$ は $\mathfrak{p}_0$ に属する一つの局所一意化変数であり，ここには $(s-1)$ 位の分岐点がある; dz は $\mathfrak{p}_0$ において位数 $(s+1)$ の極をもつ. この面の上のすべての分岐点の位数の和，すなわちその“**分岐数**(Verzweigungszahl)”を V で表わそう. ここで

$$\underline{dz\text{ の零点の個数}}-\underline{\text{極の個数}}=\sum(r-1)-\sum(s+1)$$

が成り立つ; ただし右辺の最初の和は，$z=\infty$ の真上にあるいくつかの点を除いて，この面のすべての点に関するものであり，二番目の和はちょうどいま除いた点に関するものである. この等式の右辺は

$$=\sum(r-1)+\sum_{\infty}(s-1)-2\cdot\sum_{\infty}s=V-2n$$

であり，左辺は $=2p-2$ であるから，これによって

$$V=2(p+n-1)$$

を得る.

この公式は V がつねに偶数であることを示し，面の示性数を葉数と分岐数から計算することを許すものであるが，純位置解析的にもつぎのようにしてこれを証明することができる．z 球面を三角形分割し，この際 $z=\infty$ と，分岐点の射影になっている点はすべて頂点として現われ，また一つの三角形の三つの頂点のうちの多くとも一つの真上にだけ分岐点があるようにする．§6 に述べたのと同じような考え方によって，面 $\mathfrak{F}$ を z 球面の被覆面と見なせば，この三角形分割は $\mathfrak{F}$ 上に移されることがわかる．三角形分割された球面の各基本三角形の真上には，$\mathfrak{F}$ の三角形が n 個あり，球面の各辺の真上には $\mathfrak{F}$ の辺が n 個ある．したがって $\mathfrak{F}$ の三角形と辺の総数 D と K については，三角形分割された球面の三角形，辺，頂点の個数を D_0, K_0, E_0 とするとき，

$$D = nD_0, \qquad K = nK_0$$

を得る．球面の頂点 $z=a$ の真上に分岐位数 $r_1-1, \cdots, r_h-1$ をもつ h 個の点があれば，これによって

$$h = n-[(r_1-1)+\cdots+(r_h-1)]$$

個の頂点が $\mathfrak{F}$ 上に与えられる．それゆえ $\mathfrak{F}$ 上の頂点の総数は $E=nE_0-V$ となる．球面は単連結であるから，オイラーの多面体公式により

$$E_0+D_0-K_0 = 2$$

が成り立つ．したがって

$$K-E-D = n(K_0-E_0-D_0)+V = V-2n$$

であり，また

$$K-E-D+2 = 2p$$

となる(§12)から，上に述べたとおり

$$V = 2(p+n-1).$$

今度はこのことから(前の段落でなされたのと逆に)，dz の総位数は(それゆえこの面上の各微分の総位数は)$=V-2n=2p-2$ であることが結論される．

与えられたリーマン面 $\mathfrak{F}$ を z 球面の被覆面として表わせば，これを利用してまたアーベルの定理の一部，すなわち

$$\frac{\mathfrak{p}_1{}^0\mathfrak{p}_2{}^0\cdots\mathfrak{p}_n{}^0}{\mathfrak{q}_1{}^0\mathfrak{q}_2{}^0\cdots\mathfrak{q}_n{}^0}$$

がこの面上の関数 z であるために，条件

$$\sum_{k=1}^{n} w(\mathfrak{p}_k{}^0) = \sum_{k=1}^{n} w(\mathfrak{q}_k{}^0)$$

が必要であることを簡単に証明することができる. 実際, この解釈に従って z 球面の点 z の真上にある $\mathfrak{F}$ の点を一般に $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_n$ とすれば, dw が $\mathfrak{F}$ 上の任意の第1種微分であるとき,

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dw(\mathfrak{p}_1)}{dz} + \frac{dw(\mathfrak{p}_2)}{dz} + \cdots + \frac{dw(\mathfrak{p}_n)}{dz}$$

により, z 球面上のいたるところで正則な微分が与えられるが, そのようなものは dW=恒等的に 0 を除いてありえない. z 球面上で南極 $z=0$ から北極 $z=\infty$ に至る任意の曲線, たとえば等経度線を一つ引けば, その真上にある $\mathfrak{F}$ の点は(場合により分岐点に出会う)曲線 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ をつくり, $dW=0$ を積分することによって,

$$\int_{\gamma_1} dw + \cdots + \int_{\gamma_n} dw = 0 \tag{49}$$

が導かれる. この等式はアーベルの定理のなかに述べられている必要条件と同じ意味をもつ. とはいえ, この条件が十分であるという認識には, 上記の道を通って到達しない; しかしながら, アーベルとともに第1種微分 dw の代りに, この面上で極をもつが, 極以外では正則な任意の微分をとり, このような微分について(49)と同様な関係式を導くには, 何の障害も起こらない. だがこのことにはこれ以上立ち入らないことにしよう. ——

再び z は面 $\mathfrak{F}$ 上の関数であって, すべての値を n 回とるとしよう. このとき f がこの面上の任意の関数であるとすれば, f は一つの n 次方程式

$$f^n + r_1(z) f^{n-1} + \cdots + r_{n-1}(z) f + r_n(z) = 0 \tag{50}$$

を恒等的に満たす; ただしこのなかの $r_i(z)$ は z の有理関数である. これはつぎのことを意味する: $\mathfrak{p}_0$ は $\mathfrak{F}$ 上の任意の点, t はそれに属する局所一意化変数, また $z=z(t)$, $f=f(t)$ は $\mathfrak{p}_0$ の近傍における z と f の整数ベキによる展開であるとすれば, (50)の左辺にある z に $z(t)$, f に $f(t)$ を代入するとき, 左辺は恒等的に 0 となる. この等式を証明するために, さしあたっては z 球面の上で, 点 $z=\infty$ のほか, 分岐点あるいは f の極の射影になっている点を除外しよう. その他の z 値の一つ一つに対して数

$$r_1(z)=f(\mathfrak{p}_1)+f(\mathfrak{p}_2)+\cdots+f(\mathfrak{p}_n)$$

をつくり，右辺の和は z の真上にある n 個の点に対してとる．これらの点に番号を付ける順序にこの値は無関係である．この番号づけを適当に調整することにより，除外されなかった点

$$z_0:\mathfrak{p}_1{}^0,\mathfrak{p}_2{}^0,\cdots,\mathfrak{p}_n{}^0$$

の近傍において $f(\mathfrak{p}_1),f(\mathfrak{p}_2),\cdots,f(\mathfrak{p}_n)$ は $z-z_0$ のベキ級数にすることができるから，$r_1(z)$ は除外されなかったすべての点において正則-解析的な関数である．除外された点においてこの関数は真性特異点をもつことができないから，たかだか極をもつだけである；したがってそれは z の有理関数である．全く同じようにして，$f(\mathfrak{p}_1),\cdots,f(\mathfrak{p}_n)$ の残りの基本対称関数も z によって有理的に表わされることがわかる．

z_0 の真上に n 個の異なる点 $\mathfrak{p}_1{}^0,\cdots,\mathfrak{p}_n{}^0$ があるときには，これら n 個の点において異なる値をとるように関数 f を選ぶことができる．たとえば，点 $\mathfrak{p}_k{}^0$ においてだけ極をもち，そこで主要部 $-\dfrac{dz}{(z-z_0)^2}$ をもつ微分を $d\tau_k(k=1,\cdots,n)$ とすれば，$C_1,\cdots,C_n$ に対して n 個の異なる任意の定数を選び，

$$f=(z-z_0)^2\left(C_1\frac{d\tau_1}{dz}+\cdots+C_n\frac{d\tau_n}{dz}\right)$$

と置けばよい．f に対する n 次方程式はこのとき**既約**である；すなわちその左辺，変数 u の n 次多項式

$$F_z(u)\equiv u^n+r_1(z)u^{n-1}+\cdots+r_n(z)$$

は，同じように z の有理関数を係数とする二つの多項式 $F_z{}^{(1)}(u)\cdot F_z{}^{(2)}(u)$ に分解されない．実際，これが可能であると仮定しよう；f は $\mathfrak{p}_1{}^0$ の近傍において，$\mathfrak{p}_1{}^0$ に属する局所一意化変数 $z-z_0$ のベキ級数に展開される．このベキ級数を u に代入するとき，方程式 $F_z{}^{(1)}(u)=0$ を満足すると考えてよい．$\mathfrak{p}_1{}^0$ を点 $\mathfrak{p}_k{}^0$ のうちの任意の一つと $\mathfrak{F}$ 上の曲線によって結び，その曲線の z 球面上への射影は除外された点を一つも通らないようにすれば，この曲線に沿うすべての関数要素 (z,f) に対して方程式 $F_z{}^{(1)}(u)=0$ がつねに成り立たなければならない．その結果 $f(\mathfrak{p}_k{}^0)$ もまた方程式 $F_{z_0}{}^{(1)}(u)=0$ の根である；それゆえこの方程式は n 個の異なる根をもち，したがって n 次でなければならない；ゆえに $F_z{}^{(2)}(u)$ は 0 次でしかありえない；そして仮定されたような本当の分解は生じない．

$\mathfrak{F}$ の各点 $\mathfrak{p}$ に一つの関数要素 (z, f) が対応し，この要素は方程式 $F_z(u)=0$ を満たす．二つの異なる点に対してはこれら二つの関数要素がつねに異なり，すべての点 $\mathfrak{p}$ に対応する要素はこの方程式を満たすものの全体をつくり出す．別の言葉でいえば：既約代数方程式 $F_z(u)=0$ を満たす関数要素の全体は，ワイヤストラスの意味におけるただ一つの解析形体を構成する．この解析形体をリーマン面と考えるとき，これは与えられたリーマン面と等角同型である；与えられたリーマン面は，方程式 $F_z(u)=0$ によって定められる代数形体(algebraisches Gebilde)に属するリーマン面である[1]．

この面上で極を除いて正則な関数 f^* はいずれも z の有理関数を係数として，f により有理的に表わされる：すなわち

$$f^* = R_0(z) + R_1(z)f + \cdots + R_{n-1}(z)f^{n-1}$$

である；また z と f から有理的につくられる関数はいずれもこの面上で極を除いて正則である．z を独立変数，f を方程式 $F_z(u)=0$ によって定められる z の代数関数と考えれば，z につき有理的な係数を使って f により有理的に表わされる関数の全体は一つの**代数関数体**をつくる．それゆえわれわれの主張はつぎのようにいい表わされる：一つの閉じたリーマン面の上の，極を除いて正則なすべての関数を，そのうちの任意の一つ(それはただ，単なる定数でなければよい)の関数と考えれば，それらは一つの代数関数体をつくる．

証明のために(ラグランジュの補間公式)

$$\frac{G_z(u)}{F_z(u)} = \frac{f^*(\mathfrak{p}_1)}{u-f(\mathfrak{p}_1)} + \frac{f^*(\mathfrak{p}_2)}{u-f(\mathfrak{p}_2)} + \cdots + \frac{f^*(\mathfrak{p}_n)}{u-f(\mathfrak{p}_n)}$$

と置こう；$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_n$ はここでも z 球面の点 z の真上にある n 個の $\mathfrak{F}$ の点を意味する．上に述べたのと同じ推論によって，$(n-1)$ 次多項式 $G_z(u)$ の係数は z の有理関数であることがわかる．$f(\mathfrak{p}_1), \cdots, f(\mathfrak{p}_n)$ が互いに異なるようなすべての値 z に対しては，

$$f^*(\mathfrak{p}_1) = \left[\frac{G_z(u)}{F_z'(u)}\right]_{u=f(\mathfrak{p}_1)} \qquad \left[F_z'(u) = \frac{dF_z(u)}{du}\right]$$

が得られる．われわれは(必要とあれば“ユークリッドの互除法”を適用するこ

1)　この定理の任意の(閉じていない)面に対する一般化は P. Koebe, Comtes Rendus, 1. Juli 1909 によって証明された．E. Freundlich, Funktionen mit vorgeschriebenem unendlichblättrigen Existenzbereich, Göttinger Dissertation 1910 を参照.

とにより；たとえば Weber, Algebra, 第2版, Braunschweig 1899, 第1巻, 41ページを参照) z の有理式を係数とする二つの多項式 $H_z(u)$, $L_z(u)$ を適当に定めて,

$$H_z(u)F_z'(u)+L_z(u)F_z(u)=1$$

とすることができる. このとき等式

$$f^*(\mathfrak{p})=[G_z(u)H_z(u)]_{u=f(\mathfrak{p})}$$

はこの面の上の恒等式である.

独立変数として z の代りにこの面上の任意の別の関数 $\bar{z}$ を基礎におけば, これに対してさらに面上の関数 $\bar{f}$ を適当に定め, すべての関数が $\bar{z}$ と $\bar{f}$ によって有理的に表わされるようにすることができ, この際 $\bar{f}$ のとり方は無数にある. $\bar{z}$ と $\bar{f}$ とのあいだには, 一つの既約代数方程式 $\bar{F}_{\bar{z}}(\bar{f})=0$ が成り立つ. $\bar{z}$ と $\bar{f}$ は方程式 $F_z(f)=0$ によって結びつけられた変数 z, f の有理関数である；また逆に z と f は方程式 $\bar{F}_{\bar{z}}(\bar{f})=0$ によって結びつけられた変数 $\bar{z}, \bar{f}$ の有理関数である. この"**双有理変換**" $(z, f) \leftrightarrows (\bar{z}, \bar{f})$ によって方程式

$$F_z(u)=0 \quad \text{と} \quad \bar{F}_{\bar{z}}(\bar{u})=0$$

の一方は他方に移る. この方程式の次数はもちろん決して双有理変換に関する不変量ではないが, 示性数 p は確かに不変量である.

$\mathfrak{F}$ 上ですべての値を一回だけとる関数 z があれば, 対応する代数関数体は z の有理関数体(そして $p=0$)である. $\mathfrak{F}$ 上ですべての値を一回だけとる関数は確かにないけれども, すべての値をちょうど二回ずつとるような関数 z があれば, 対応する体を定める代数方程式(これは二次でなければならない)はつぎの形をもつと仮定することができる:

$$u^2=(z-e_1)(z-e_2)\cdots(z-e_l),$$

ただし e_i はすべて互いに異なる. これら l 個の点のほか, l が奇数のときには点 ∞ もまた1位の分岐点であり, したがって示性数 p は l が偶数のとき $=\frac{l}{2}-1$ であり, l が奇数のとき $=\frac{l-1}{2}$ である. これからわかるように, $l=1$ または $=2$ からはまた再び有理関数体 $p=0$ が導かれる；$l=3$ または $=4$ からは $p=1$ が生じ, これは楕円的な場合である；$l>4$ のとき, われわれはいわゆる**超楕円**関数体を得る. ——示性数 $p=1$ をもつ任意の代数関数体のなかには, あらかじめ与えられた二つの極をもつ関数, したがってすべての値をただ二回ず

つとる関数がつねに存在する；示性数2をもつ各代数関数体のなかにも，このような関数が見いだされる；そのためには二つの線形独立な第1種アーベル微分を互いに割ればよい．$p=3$ 以上になってはじめて，超楕円的な場合がもはや一般的な場合ではなくなる[1]．

ここで行なわれたようにリーマン面から出発しないで，（ワイヤストラスの理論やそのほかの理論において行なわれたように）一つの決まった代数方程式 $F_z(u)=0$ から出発するならば，すべての関数と微分を――それらの存在は前の数節においてディリクレの原理を使って推論されているが――純代数的な方法により z, f の有理式 $[R(z, f)dz$ の形をした微分$]$ として構成することを自然な要請とみなすことができよう．しかし与えられたものが代数方程式ではなくリーマン面であるときにはただちに，ここでリーマンにくみして説明した関数論的な方法が逆に自然なものとして出現しなければならない．上記の代数的な構成原理が，特にこの理論の特殊な応用を顧慮するときどれほど重要であるとしても，――なおかつリーマンの立場は一そう高いものということができるであろう；なぜならこの立場からは，数学的認識のこの領域を支配する固有の法則に対して，他の方法によって得られるよりも一そう包括的な，一そう深い洞察が可能となるからである．ワイヤストラスの概念形成に従うときでさえ，すでに以前私が述べたように，解析形体を一つの二次元多様体と解釈することは，事がらを歪曲せずには避けられないであろう；またそこから，この多様体に与えられる位置解析的性質を――それらの深刻な関数論的意味はいままでの

1)　ここに描きえた代数関数論のスケッチは不完全なものに過ぎない．一そう正確なものを読者は，すでに挙げた Riemann, Weierstraß, Klein, C. Neumann, Stahl, Hensel-Landsberg の著作のほか，なおつぎの著述のなかに見いだす：Clebsch と Gordan, Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig 1866(曲線論的). Brill と Noether, Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie, Math. Ann., **7**(1874), 269-310 ページ(曲線論的)；Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen, Bericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, **3**, Berlin 1894. Dedekind と Weber, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Crelles Journal, **92**(1882), 181-290 ページ(数論的)；Weber, Algebra, 第III巻, 第2版, Braunschweig 1908, 623 ページ以降にも記載がある．Klein-Fricke, Theorie der elliptischen Modulfunktionen (1890-92), 第I巻, Abschn. III, Kap. 1, 2 および第II巻, Abschn. IV, Kap. 1. Klein, Riemannsche Fläche I, II, autographierte Vorlesungen, Göttingen 1892/93. Appell と Goursat, Théorie des fonctions algébriques, Paris 1895. Baker, Abels theorem and the allied theory incl. the theory of the Theta functions, Cambridge 1897. Fields, Theory of the algebraic functions of a complex variable, Berlin 1906. Stahl, Abriß einer Theorie der algbraischen Funktionen einer Veränderlichen in neuer Fassung(Löffler と Noether によって編まれた遺稿), Leipzig 1911. (訳注)　岩澤，前掲書，本書 91 ページ訳注.

議論で十分明らかにされた——他のすべての性質に優先させて最も原初的なものとみなすまでには，わずか一投足に過ぎない．さらに進んでリーマンのとり扱い方を特徴づけるのは，そのなかのいたるところで，解析形体ではなく，リーマン面が与えられたものとみなされ，そしてそれに属する一つの解析形体の構成こそまさに解くべき問題の主要な一部分をつくっているということである．リーマンの表現自体のなかでは，もちろんまだこの立場は現在のように完全に明確な形で現われてはいない；われわれがいまこのような形でこの立場を抽出し完成することができるのは，Prym, Dedekind[1), C. Neumann, そして特にクラインの仕事に負うものである．

示性数 p をもつどのリーマン面も，われわれがすでに見たように，球面の真上の(有限個の分岐点をもつが境界をもたない)多葉な被覆面として表わされうる．しかしながらこの“正規形”は，葉数 n を条件 $n=p+1$(これはつねに達成されるはずである)によって正規化するときでさえ，なおきわめて多様な形でつくられる．それよりもはるかに高度の原理的な意味をもつのは，任意の示性数をもつリーマン面に対して本質的に一意に定められる正規形，一意化理論(保型関数論)によって与えられる正規形である．

§19. 一　意　化.

一意化の理論において，ワイヤストラスとリーマンの思想圏は一つに結合し，完全な統一に達する．ワイヤストラスの場合，解析形体 (z, u) は一つ一つの点においてパラメータ t(“局所一意化変数”)を用いる別々の表現：$z=z(t)$, $u=u(t)$ によって記述され，リーマンは当然のことながら全形体の統一的表現 $z=z(\mathfrak{p})$，$u=u(\mathfrak{p})$ を得るが，この際 $\mathfrak{p}$ は(普通の意味における複素変数ではなく)一つのリーマン面上の点と解釈することを余儀なくされる；ところが一意化理論においては一つの解析形体に対して，単葉な複素平面の或る領域のなかを動く一つのパラメータ t，すなわち**一意化変数**による統一的表現 $z=z(t)$, $u=u(t)$ を求めることが問題とされる．この問題は保型関数論に通じるが，後

1) Prym は 1869 年以来の彼の仕事においてこの立場をとっている；Dedekind については，40 ページに挙げた楕円モジュラー関数に関する 1877 年の仕事がここで考慮に入れられる．

者の基礎を本質的に築いた人としてF. クラインとH. ポアンカレ[1]を挙げなければならない；また彼らの一般的な解釈と結果は，それ以前の特殊ではあるが重要な諸研究，特にリーマン，Schwarz, Fuchs, Dedekind, クライン，およびSchottkyの研究を通じて，文献のなかに準備されているのが見られる．一意化の可能性に対する証明が被覆面の理念に基づきはじめて完全に与えられたのはごく最近(1907)のことであり，それはP. KoebeとH. ポアンカレによる[2]．今日，複素関数論の内部において中心的な位置を要求しうる一意化の理論が，ひときわ均斉のとれた壮大な数学的建築としてわれわれの前にそびえているとすれば，それはだれよりもまずクライン，ポアンカレおよびKoebeの功績である[3]．——つぎに行なわれる証明はディリクレの原理から一意化変数の存在を結論するものであるが，その基本的な着想はヒルベルトに基づく[4]．

求める一意化変数tは，与えられた面$\mathfrak{F}$の各点において局所一意化変数として適するようにつくられることが必要である．したがってそれは普遍被覆面$\tilde{\mathfrak{F}}$の上で一意の，1位の極を除けば正則-解析的な関数でなければならない．最も強い一意化の能力をもつtを求めるならば，われわれはtが面$\tilde{\mathfrak{F}}$の異なる二点で同じ値を決してとらないように，したがって$\tilde{\mathfrak{F}}$をt球面の或る領域の上へ両側から一意等角に写像するようにtを決定しようとすることになるであろう．こうすれば基礎面$\mathfrak{F}$上の関数ばかりでなく，それよりもはるかに広い範囲の(一般には$\mathfrak{F}$上で無限多意の)関数，すなわち$\mathfrak{F}$上の一つの関数要素が$\mathfrak{F}$のなかのすべての道に沿って分岐にも境界にも出会わずに解析接続されるとき，その結果として得られるような関数の全体がtの一意関数として表わされ

1) Poincaréについては1881/82年のComptes Rendusに発表された数多くのノートのほか，特にActa Mathematica **1, 3, 4, 5**(1882/84)の諸論文を見よ；KleinについてはMath. Ann., **19, 20, 21** (1882/83)の諸論文，さらに最近完結した綜合的な著述: FrickeとKlein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Leipzig 1897–1912を見よ．

2) Poincaré, Acta Mathematica **31**(1908), 1–63ページ；Koebe, Nachrichten der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1907, 191–201ページおよび633–669ページ．

3) Koebeによる新しい文献の整理，Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven, I [Math. Ann., **67**(1909), 146–149ページ], II [Math. Ann., **69**(1910), 2–3ページ] および III[Math. Ann., **72**(1912), 438–439ページ] を参照；さらにKoebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven I [Crelles Journal, **138**(1910), 195ページ] および II [Crelles Journal, **139** (1911), 251ページ以下] を参照．関数論のこの部分における諸結果と諸問題に関する一般的な概観のためには，Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, **21**(1912), 153–166ページにあるKarlsruhe会議(1911)に関する報告が特に役立つ．

4) Zur Theorie der konformen Abbildung, Göttinger Nachrichten, 1909, 314–323ページ．

る．そして $\tilde{\mathfrak{F}}$ は($\mathfrak{F}$ と違って)単連結であるから，このような写像の可能性は $\tilde{\mathfrak{F}}$ の位置解析的性質と矛盾しない．前数節において基礎においた仮定，すなわち $\mathfrak{F}$ が閉じているという仮定をわれわれはいま進んで捨てることができる；この仮定は一意化理論に対してはどのような点から見ても簡易化をもたらさないからである．

求める一意化変数を得るには，ディリクレの原理を $\mathfrak{F}$ の上ではなく，$\tilde{\mathfrak{F}}$ の上に適用するだけでよい．われわれは $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上に一点 O を局所一意化変数 z_0 とともに選び，ディリクレの原理を使って，点 O を除けば $\tilde{\mathfrak{F}}$ 全体で正則なポテンシャル関数 U をつくる；ただしこの関数は O で $\mathfrak{R}\dfrac{1}{z}$ のように振舞い，またつぎの性質をもつようにする：

1. 面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 全体から O のまわりの任意の小さな z_0 円板を除いた残りでとられた U のディリクレ積分は有限であり，

2. $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上で連続的に微分可能な関数 w が有限なディリクレ積分をもち，O の近傍で消えるとき，つねに変分は 0 となる：

$$\mathbf{D}(U, w) = 0.$$

U は $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の微分 $d\tau$ をつくり出すが，$\tilde{\mathfrak{F}}$ は単連結であるから，これは一定の関数

$$\tau = U + iV$$

の微分でなければならない；この実部は U と一致し，またこの関数は点 O を除けばいたるところで正則-解析的であり，O では 1 位の極をもつ．このとき τ はわれわれが求めるとおりの一意化変数である．この事実の証明は，Koebe 氏によるつぎの推論[1]を用いると，きわめて洗練された形で成しとげられる．

まずつぎのことを示そう：

<u>V_0 が任意の実の定数であるとき，$V > V_0$ であるような $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の点全体はただ一つの領域をつくる；$V < V_0$ であるような点についても同様である．</u>

O に対して $\dfrac{1}{\tau}$ は一つの局所一意化変数であるから，K_0: $\left|\dfrac{1}{\tau}\right| \leqq a_0$ を O のまわりの $\dfrac{1}{\tau}$ 円板としよう．$V = V_0$ であるようなすべての点から成る $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の閉集合を $\mathfrak{E}(V_0)$ とすれば，$\mathfrak{E}(V_0)$ によって定められるいくつかの領域のうち，

1) Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode, Nachrichten der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1910, 61–65 ページ．

K_0 のなかにある点を含むものは，確かに二つしかない．それゆえわれわれの主張が誤りであるとすれば，$\mathfrak{G}(V_0)$ によって定められる領域のうちに，O の近傍 K_0 のなかに侵入しないものが一つあるはずである；これを $\mathfrak{G}$ としよう．いま $\varphi(u)$，$\psi(u)$ はすべての実の値 u に対して定義された連続な，そして連続的に微分可能な任意の二つの関数であるとする．われわれはつぎのように面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の関数 w をつくろう：

$$w=\begin{cases}\varphi(U)\psi(V) & (\mathfrak{G}\text{ 内のすべての点に対して})\\ 0 & (\mathfrak{G}\text{ に属さないすべての点に対して}).\end{cases}$$

ここで

$$\psi(V_0)=0,\qquad \psi'(V_0)=0\qquad \left[\psi'=\frac{d\psi}{du}\right]$$

であるとすれば，上の関数はいたるところで連続的に微分可能となるであろう．O の近傍 K_0 では w が恒等的に消える．$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{G}$ の任意の一点であり，$z=x+iy$ は $\mathfrak{p}$ に属する局所一意化変数であるとすれば，

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\varphi'(U)\psi(V)\frac{\partial U}{\partial x}+\varphi(U)\psi'(V)\frac{\partial V}{\partial x}\\&=\varphi'(U)\psi(V)\frac{\partial U}{\partial x}-\varphi(U)\psi'(V)\frac{\partial U}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\varphi'(U)\psi(V)\frac{\partial U}{\partial y}+\varphi(U)\psi'(V)\frac{\partial U}{\partial x}\end{aligned}$$

である．それゆえ $\varphi,\psi,\varphi',\psi'$ が有界な関数であれば，$\tilde{\mathfrak{F}}$ 全体にわたる w のディリクレ積分は有限になるであろう．したがってさきに挙げた仮定のもとでは $\mathbf{D}(U,w)=0$ とならなければならない．ところで

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi'(U)\psi(V)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]$$

である．それゆえ，φ',ψ がその独立変数のすべての値に対して($u=V_0$ に対する ψ を除けば)正となるように配慮すれば，われわれは矛盾に到達する[1]．

---

1) ここに挙げたすべての要求を満たすような値の与え方は，たとえば関数

$$\alpha(u)=\arctan u\qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha(u)<\frac{\pi}{2}\right),\qquad \beta(u)=\frac{u^2}{1+u^2}$$

を使って，

$$\varphi(u)=\alpha(u),\qquad \psi(u)=\beta(u-V_0)$$

とおくことによって得られる．

こうして証明された事実と，$\tilde{\mathfrak{F}}$ が単連結であることから，τ の挙動につきつぎの結論を導くことができる：

1. $d\tau$ はどこにも零点をもたない．実際，τ が値 τ_0 をとる $\tilde{\mathfrak{F}}$ の一点 $\mathfrak{p}_0$ において $d\tau=0$ であるとすれば，$\tau-\tau_0$ ではなく，$\sqrt[r]{\tau-\tau_0}$（r は整で $\geqq 2$）が $\mathfrak{p}_0$ に属する局所一意化変数となる；われわれは $r=2$ であると仮定しよう（もっと大きい r の値に対しても証明は同じように行なわれる）．私は $\tau-\tau_0=\sigma^2$ と置き，複素 σ 平面において中心 $\sigma=0$ をもつ円板 K を十分小さく描いて，これが $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の点 $\mathfrak{p}_0$ の或る近傍の，関数 σ によってつくられる等角な像とみなされるようにする．私は K のなかにある四つの点 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ をとり，これらは図 24 に

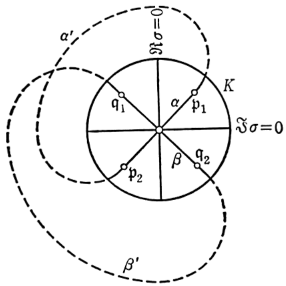


図 24.

示すように原点で互いに交わる真っすぐな線分 α, β によって十字形に結ばれるようにする．$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ においては $V>V_0$, $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ においては逆に $V<V_0$ である[1]．この図を私は決まった仕方で三角形分割されている面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ の上に移されたものと考える[2]；このとき私は，$V>V_0$ であるような点ばかりから成る折れ線 α' で $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ を結び，また同様に，$V<V_0$ であるような点ばかりから成る折れ線 β' で $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ を結ぶことができる[3]．二つの閉曲線 $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$ は点 $\mathfrak{p}_0$ においてだけ互いに交わり，そしてこのことから，52 ページの議論と全く同様に，$\beta+\beta'$ は面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ を分けないということが導かれる．β' に属する一つの線分を，一つの

1)（訳注）$\tau_0=U_0+iV_0$.

2) $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上で私は今後 α, β を“線分”ということがもはや許されない．

3) もちろん私は，β' が β と両端以外にどのような点をも共有しないと仮定することができる；52 ページを参照．

基本線分 α^* によって横ぎれば，私は $\beta+\beta'$ と決して出会わない折れ線によってその両端を互いに結ぶことができる．この折れ線と α^* とをつなげば，$\tilde{\mathfrak{F}}$ を分けない多角形ができる．しかし $\tilde{\mathfrak{F}}$ は単連結であるから，このような多角形は存在することができない．

2. τ が値 τ_0 をとる $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の点につき，それは τ 球面の点 τ_0 の真上にあるとみなすことにより，$\tilde{\mathfrak{F}}$ は τ 球面あるいは τ 平面の真上の被覆面 $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ になる．これはいま 1. のもとに証明したばかりのことによって非分岐である．$\tau=\infty$ の真上にはただ一つの点 O がある．τ 平面においては $\tau=\infty$ から出発して，U の値が大きくなってゆく向きに線 $V=V_0$ を追跡し，$\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ の上では O から出発して，τ 平面上でこの線を描く点の真上にいつもいながら，連続的に動いてゆく点 $\tilde{\mathfrak{p}}$ を追跡する．私が ∞ に帰る前に境界に出会わないときには，∞ の真上には一点 O があるだけであるから，$\tilde{\mathfrak{p}}$ は一つの閉曲線 $\tilde{\gamma}$ を描き，$\tilde{\gamma}$ は τ 平面の線 $V=V_0$ を単純に覆う．しかし私が境界に出会うときには，$\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ 上には一つの線 $\tilde{\gamma}_1$ が得られ，これは直線 $V=V_0$ の或る一部分 $U<U_1$ を単純に覆う．この場合には，私はまた直線 $V=V_0$ を U の値が小さくなってゆく向きに追跡し続け，そしてこの直線の一部分 $U>U_2$ を単純に覆う線 $\tilde{\gamma}_2$ を $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ 上に得る．$\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2$ はまとまって $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ 上に O を通り，端点をもたず[1]，閉じない曲線 $\tilde{\gamma}$ をつくる．これら二つの場合のいずれにおいても，線 $\tilde{\gamma}$ は面 $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ を——これは単連結であるから——二つの領域 $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}''$ に分ける．$\tilde{\gamma}$ 上の点以外に，$V=V_0$ となるような点がなお $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上にあるとすれば，たとえばそれらが $\mathfrak{G}'$ にあるとき，$\mathfrak{G}'$ のなかには $V<V_0$ となる点も $V>V_0$ となる点も存在することになる．その結果 $\mathfrak{C}(V_0)$ は少なくとも三つの領域を決定しなければならなくなる．したがって線 $\tilde{\gamma}$ により，$V=V_0$ となるような点はすべて尽くされる．それゆえ $\tilde{\mathfrak{F}}$ は τ 球面の被覆面としていたるところたかだか一葉[2]である．$V=V_0$ が $\tilde{\mathfrak{F}}$ の上で閉じた線であるとき，値 U_0+iV_0 は $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上で一度，そしてただ一度だけとられる．

1) 端点のない曲線は

$$\tilde{\mathfrak{p}}=\tilde{\mathfrak{p}}(\lambda) \qquad [0<\lambda<1]$$

という表現をもち，これに属する点 $\tilde{\mathfrak{p}}$ の全体は，パラメータの値 $\lambda=0$ と $\lambda=1$ に対応する曲線上の点がないにもかかわらず，閉集合をつくる．

2) 原文 zweiblättrig は誤植であろう．

なお，$\tilde{\gamma}$ が面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ をつねに分けなければならないことを正確に証明しよう．実際，もしもそうでなければ，われわれは $\tilde{\mathfrak{F}}$ を $\tilde{\gamma}$ に沿って切り開き，このように截断された面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ を二枚用意し，それらの切れ目を互い違いにつなぎ合わせることによって，$\tilde{\mathfrak{F}}$ の真上に二葉の非分岐無境界な被覆面を構成する．抽象的にいい表わせばつぎのようにするのである(58 ページ[1])の同様な構成法を参照)：$\tilde{\mathfrak{F}}$ の各点 $\tilde{\mathfrak{p}}$ に，われわれは二つの"その真上にある"点 $\tilde{\mathfrak{p}}^1, \tilde{\mathfrak{p}}^2$ を対応させる．$\tilde{\mathfrak{p}}_0$ が $\tilde{\gamma}$ 上にない点で，$\tau_0=\tau(\tilde{\mathfrak{p}}_0)$ とすれば，$\tilde{\gamma}$ の点を含まない任意の$(\tau-\tau_0)$円板を K とするとき，K の内部にある点 $\tilde{\mathfrak{p}}$ の真上に来るような点 $\tilde{\mathfrak{p}}^1$(上の指数 1 をもつ点)の全体は $\tilde{\mathfrak{p}}_0{}^1$ の"近傍"をつくり，同じ点 $\tilde{\mathfrak{p}}$ の真上に来る点 $\tilde{\mathfrak{p}}^2$ の全体は $\tilde{\mathfrak{p}}_0{}^2$ の"近傍"をつくるとする．これに反して $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ が $\tilde{\gamma}$ 上にあるときは，K を任意の$(\tau-\tau_0)$円板としよう．射影点 $\tilde{\mathfrak{p}}$ が K の内部にあって条件 $V\geqq V_0$ を満たすような点 $\tilde{\mathfrak{p}}^1$ の全体は，条件 $V<V_0$ を満たす K の内点 $\tilde{\mathfrak{p}}$ の真上にあるすべての点 $\tilde{\mathfrak{p}}^2$ とともに，$\tilde{\mathfrak{p}}_0{}^1$ の"近傍"をつくるものとし，また同じようにして $\tilde{\mathfrak{p}}_0{}^2$ の近傍を定義する．あとの場合，$V=V_0$ となるような K 内の点はすべて確かに $\tilde{\gamma}$ に属するから，ここに述べた近傍の概念の定義は，このような定義に課せられたすべての要求を満足する．$\tilde{\gamma}$ が分けないとすれば，いま定義した多様体において，その任意の二点が連続曲線によって結ばれるという条件もまた明らかに満たされている．しかしこのような被覆面の存在は，$\tilde{\mathfrak{F}}$ が単連結であるという事実と矛盾する．

全証明の最後の一歩は，線 $V=V_0$ が $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上で閉じないような実数 V_0 はたかだか一つしかありえないという定理を確かめることにある．そのために，このような二つの線 $\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}''$ すなわち $V=V_0'$ および $V=V_0''$ があると仮定し，さらに補助的な線として，完全に K_0 内を通る閉じた線 $U=U_0$ をとる(定数 U_0 として十分大きな正の値をとる)．$U>U_2'$ は曲線 $\tilde{\gamma}'$ の一部分 $\tilde{\gamma}_2'$ であるとし，$U>U_2''$ は $\tilde{\gamma}''$ の一部分 $\tilde{\gamma}_2''$ であるとする[2]．図 25 において太く描かれた τ 平面の線の真上には，それを単純に覆う $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ 上の曲線があり，これは端点をもたない．$\tilde{\mathfrak{F}}$ の単連結性により，これは $\tilde{\mathfrak{F}}$ を二つの領域に分けるから，これら二つの領域のうち点 O を含まない方を $\mathfrak{G}$ としよう．われわれは再び

---

1) (訳注)　原文は(訳書の)34 ページを指示しているが，誤植であろう．

2) (訳注)　前ページの $\tilde{\gamma}_2$ の定義を見よ．

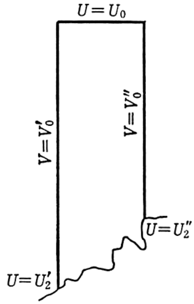


図 25.

$$w = \begin{cases} \varphi(U)\psi(V) & (\mathfrak{G} \text{ 内で}) \\ 0 & (\mathfrak{G} \text{ 以外で}) \end{cases}$$

とおく．この関数が $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上で連続的に微分可能であるために，

$$\varphi(U_0) = \varphi'(U_0) = 0, \qquad \begin{matrix} \psi(V_0') = \psi'(V_0') = 0 \\ \psi(V_0'') = \psi'(V_0'') = 0 \end{matrix}$$

とする必要がある．$\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ は有界で，φ' は $u=U_0$ を除けば正，ψ は $u=V_0'$ と $u=V_0''$ を除けば正であるとする[1]．こうすれば等式 $\mathbf{D}(U, w)=0$ に対して矛盾が生ずる．これによってつぎのことが証明された：

τ は面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ をつぎの領域のうちのいずれか一つの上へ両方から一意に，等角に写像する：

(場合 1)　全球面

(場合 2)　一点 τ_0 を除いた全球面

(場合 3)　截線 $V=V_0$, $U_1 \leqq U \leqq U_2$ を除いた全球面.

われわれは τ をいくらか違った一意化変数 t に置き換える．第一の場合にはもちろん $\tau=t$ とする．第二の場合には，球面から除外される一点が無限遠点となるように配慮する；それゆえ $t=\dfrac{1}{\tau-\tau_0}$ とおく；t はこの被覆面を(無限遠点を含まない)全平面に写像する．第三の場合には，まず一つの整の線形変換により，截線が

---

1) これらの要求は［164 ページの脚注を参照］

$$\varphi = \alpha(u-U_0)\cdot\beta(u-U_0), \qquad \psi = \beta(u-V_0')\cdot\beta(u-V_0'')$$

によりすべて満たされる．

$$V=0, \quad -1 \leqq U \leqq +1$$

で与えられるようにすることができる；それから式

$$\tau=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

を使って，切れ目の入った τ 球面は t 平面の単位円の内部 $|t|<1$ へ等角に写像される.

ここに述べた一意化変数 t の構成は，二つのはっきり分かれた手続きに従ってなされる．まず面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ により，この問題の位置解析に属する部分が解決され，それから，単連結な面はいずれも球面上の或る領域へ等角に写像されるという関数論的定理により（この定理を $\tilde{\mathfrak{F}}$ に適用するとき）一意化変数が与えられる．考えのすじ道を少し修正するだけで，単葉型(schlichtartig)の面もまたすべて球面の領域へ等角に写像されうることが示される[1]；しかし単葉型でない面に対しては，位置解析的根拠からこのことが否定される：このときには球面領域への，両側から一意で領域連続な写像は決して生じえない．$\mathfrak{F}$ に属する（$\mathfrak{F}$ に対して非分岐の）各一意化変数は，$\mathfrak{F}$ の或る非分岐無境界な単葉型被覆面 $\bar{\mathfrak{F}}$ を一つの平面領域上へ等角に写像するであろう．同じ被覆面 $\bar{\mathfrak{F}}$ を平面の部分領域へ写像する二つの一意化変数を同じ類 $\{\bar{\mathfrak{F}}\}$ に数えこむ．このとき，すべての一意化変数を構成するためにはつぎの二つの問題を解くことが要求される：

1. 位置解析の問題：与えられた面に対して，非分岐無境界な単葉型被覆面 $\bar{\mathfrak{F}}$ をすべて求めること；

2. 等角写像の問題：一つの単葉型の面 $\bar{\mathfrak{F}}$ をあらゆる可能な仕方で平面領域へ等角に写像すること．

第二の問題がつねに少なくとも一つの（したがってまた無限に多くの）仕方で可能であること，それゆえ，単葉型という位置解析的条件によって考えうる一意化変数の各類 $\{\bar{\mathfrak{F}}\}$ が，関数論的に，現実に存在する一意化変数を含むということ，これが Koebe の一般一意化原理[2]の内容である．もちろんこのことは，$\mathfrak{F}$ に対して非分岐な一意化変数ばかりでなく，分岐する一意化変数の全体をも

---

1) Koebe, Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode, Göttinger Nachrichten, 1910, 67–74 ページ.

2) 特に，P. Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Erster Teil: Das allgemeine Uniformisierungsprinzip, Crelles Journal, 138 (1910), 192–253ページを見よ.

同時に包括するまで拡張される．しかしながらすべての可能な一意化変数のうちでも，上に構成され，t で表わされたものに対して最も大きな原理的意味が与えられることはいうまでもない．

§20. リーマン面と非ユークリッド運動群．基本領域．ポアンカレの Θ 級数．

一意化変数 t は前節の終りに述べたその性質によってどの程度まで確定するのか？ いいかえれば，どれだけ多様な仕方で面 $\tilde{\mathfrak{F}}$ を球面，平面または単位円の内部へ等角に写像することができるのか？ この問は明らかにつぎのことに帰着する：どれだけ多様な仕方で球面，平面または円の内部を，これら三つの領域自身のうち，いずれか一つの上へ等角に写像することができるか？ まずさしあたって明らかなように，球面は閉じているということからすでに，平面へも円の内部へも写像されない．しかしまた平面から円の内部への等角写像も不可能である；t 平面を等角に t^* 平面の単位円の内部に変換する関数 $t^*(t)$ があれば，それはすなわち独立変数のすべての値に対して，その絶対値を限界 1 以下に保つ超越整関数であるが，このようなものはリウビル(Liouville)の定理によって存在しない(定数は例外であるが，ここでは全く無意味である)．さらに進んでいまつぎの簡単な定理が成り立つ：

(場合 1) (普通の方法で複素変数によって表わされた)球面からそれ自身への等角写像はすべて線形変換[1]によって与えられる．

(場合 2) 複素平面は整の線形変換によってだけそれ自身へ等角に写像される．

(場合 3) 単位円の内部も同様に線形変換によってだけそれ自身へ等角に写像されうる．

場合 1. つぎのことを示しさえすればよい：$t^*=t^*(t)$ によって t 球面が t^* 球面へ等角に写像され，しかも $t=0$ が $t^*=0$ へ，$t=\infty$ が $t^*=\infty$ へ移るならば，$t^*=ct$ (c は定数)でなければならない．実際このときには $\dfrac{1}{t^*}$ が t 球面の北

1) (訳注) 一次変換あるいはメービウス変換．

極($t=\infty$)において正則であり，そこで一つの零点をもつ；それゆえ $\dfrac{t}{t^*}$ もまたそこで正則である．関係 $t\to t^*$ は両側から一意であるから，t^* が 0 となるのは $t=0$ に対してだけであり，しかもそこで1位である；したがって $\dfrac{t}{t^*}$ は全 t 球面で正則，ゆえに定数である．

場合2. ここでも $t=0$ は $t^*=0$ に写像されると仮定することができる．このときまず，

$$\lim\frac{1}{t}=0 \quad \text{のとき} \quad \lim\frac{1}{t^*}=0 \tag{51}$$

であることを証明しなければならない．円 $|t^*|=R^*$ には t 平面において一つの閉曲線 $\mathfrak{C}$ が対応する；R_0 は原点から $\mathfrak{C}$ 上の点までの最大の距離であるとし，R は $>R_0$ である任意の数とする．円板 $|t|\leqq R$ において $|t^*|$ がその最大

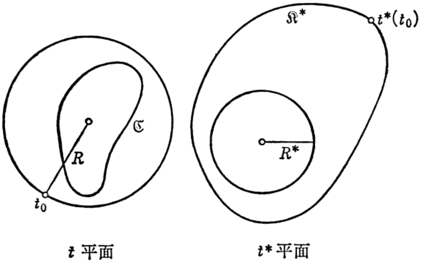


図 26.

値をとる点を $t=t_0$ とすれば，t_0 は境界にあって，最大値は $>R^*$ でなければならない．円 $|t|=R$ の t^* 平面における像曲線 $\mathfrak{R}^*$ は円 $|t^*|=R^*$ と交わることができず——なぜならこれら二つの曲線の原像である円 $|t|=R$ と曲線 $\mathfrak{C}$ が t 平面において交わらないから——，また $\mathfrak{R}^*$ 上の点 $t^*(t_0)$ は絶対値 $>R^*$ をもつということにより，$\mathfrak{R}^*$ 上のすべての点に対して $|t^*|>R^*$ でなければならない；すなわち $|t|>R_0$ ならば必ず $|t^*|>R^*$ である；このことは主張(51)である．したがって $\dfrac{1}{t^*(t)}$ は t 球面の北極において正則であり，そこで零点をもつ；それからさきは場合1と全く同じ議論をすることができる．

場合3はいわゆるシュワルツの補題[1)]を使って解決される．ここでも $t=0$ は

1) Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, 第 II 巻，109–111 ページ．目下の問題にこの補題を応用するのは，Poincaré, Acta Mathematica, 4, 231–232 ページによる．

$t^*=0$ へ移ると仮定することができる．円板 $|t|\leqq q\,(<1)$ において正則な関数 $\dfrac{t^*}{t}$ を考えると，その絶対値は境界において最大値に到達するはずであるから，$<\dfrac{1}{q}\,(|t^*|<1,\ |t|=q)$ である．私は q をいくらでも 1 に近く選ぶことができるから，単位円の内部にあるすべての t に対して $\left|\dfrac{t^*}{t}\right|\leqq 1$ でなければならない．全く同様にして $\left|\dfrac{t}{t^*}\right|\leqq 1$ が得られるから，$\left|\dfrac{t^*}{t}\right|=1$ である．この関係が成り立ちうるのは，$\dfrac{t^*}{t}$ が絶対値 1 の定数であるときだけである．

さきに述べた主張はこうして証明された：一意化変数 t はどの場合でもつねに，線形変換を除けば一意的に定められる．単位円の内部をそれ自身に移す線形変換は

$$t^*=\frac{(a+ib)t+(c-id)}{(c+id)t+(a-ib)} \tag{52}$$

$$\{a, b, c, d \text{ は実数；行列式} (a^2+b^2)-(c^2+d^2)=1\}$$

という形をもつ．

特に，$\tilde{\mathfrak{F}}$ の被覆変換は $\tilde{\mathfrak{F}}$ からそれ自身への両側から一意の等角な写像であるから，この変換は t 平面のなかに線形変換として写像されなければならない．こうして被覆変換の群には，これと同型な或る線形変換群 Γ が対応する．群 Γ に属する変換は(恒等変換を除いて)いずれも，像領域(球面または平面または円の内部)に**固定点**，すなわちこの変換によってそれ自身に移る点をもつことはできない．球面上にはどの線形変換も固定点をもつから，場合 1 においては恒等変換以外に被覆変換はありえない；このとき $\tilde{\mathfrak{F}}$ は $\mathfrak{F}$ 自身と，$\mathfrak{F}$ はリーマン面として球面と同じである．与えられたリーマン面 $\mathfrak{F}$ が球面と同値であるときだけ場合 1 が起こる．

$\mathfrak{F}$ の同じ一点の真上にある $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の諸点は，この写像においては，Γ に関して同値な点 t の系として現われる．このような系 Σ はつぎの性質をもつ：これに属する任意の二点は Γ に属する変換によって一方から他方へ移るが，Σ に属する点から Γ に属する変換によって移されて来る点はいずれもまたそれ自身 Σ に属する(30 ページを参照)．$\mathfrak{F}$ 上で極を除いて正則な一意関数は，t によって表わされるとき，Γ に属するこの変数の**保型関数**，すなわち群 Γ の変換によって不変に振舞う関数 $z(t)$ として現われる：いいかえれば，$t^*=\dfrac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$ が群 Γ の変換であるとき，

$$z\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)=z(t).$$

群 Γ は**不連続**でなければならない；これはつぎのことを意味する：Γ に関して同値な点の系は像領域の内部に集積点をもつことは決してできない．像領域に属し，Γ に関して同値な点からなる系の一つ一つを，面 $\mathfrak{F}_\Gamma$ の"点"とみなし，t 平面の角計量をそのまま $\mathfrak{F}_\Gamma$ の上へ移すことにより，一つのリーマン面 $\mathfrak{F}_\Gamma$ を定義すれば，この $\mathfrak{F}_\Gamma$ は与えられた $\mathfrak{F}$ にリーマン面として同値である；これはリーマン面の最も妥当な正規形と考えられ，どのリーマン面をもこの形にもって来ることができる．

場合 2 においては，Γ を構成する整の線形変換が有限な範囲に固定点をもってはならない．この要求は変位(並進)$t'=t+\alpha$ だけが満たす．不連続な並進群にはつぎの三種がありうる[1]：

1. 恒等変換だけから成るもの；このとき $\tilde{\mathfrak{F}}$ は $\mathfrak{F}$ と同じであり，$\mathfrak{F}$ は平面[“一点を除いた”球面，すなわち北極をもたない球面]に同値である；

2. ただ一つの変位の繰り返し

$$\Gamma:\ t^*=t+n\alpha \qquad [n=0,\pm1,\pm2,\cdots]$$

から成るもの；このとき $\mathfrak{F}$ は明らかにリーマン面として無限に長い直円柱に同値，したがってメルカトール射影によれば，二点を除いた球面[北極と南極をもたない球面]に同値である；

3.
$$t^*=t+m\alpha+n\beta \qquad \begin{pmatrix} m=0,\pm1,\pm2,\cdots \\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots \end{pmatrix}$$

という形の変換から成るもの；ただし α,β は二つの異なる方向への変位である．このとき $\mathfrak{F}$ は閉じており，dt は $\mathfrak{F}$ 上で一意の，いたるところで正則な微分であって，どこにも零点をもたない；それゆえ $\mathfrak{F}$ は示性数 1 の閉リーマン面である．このような面はいずれも——その型は(その最も一般な形ではないが)輪環面である——また実際第 1 種積分によって一意化を許し，このとき普遍被覆面は平面の上へ写像される．

1) ここに挙げる三つの場合だけが起こりうるということは，部分格子に関する(二次元)数格子の調整の方法によって明らかにされる；本書 83 ページ以下あるいは G. Kowalewski, Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen, Leipzig 1911, 57 ページ以下を見よ．

上に列挙した少数の例外の場合($\mathfrak{F}$＝全球面，一点または二点を除いた球面，示性数1の閉じた面)を除けば，つねに場合3が起こり，この場合には単位円の内部が像領域として現われる．基礎面 $\mathfrak{F}$ 上の関数を表わす t の保型関数に対して，この円の周は一般に自然境界になるであろうから，t は**境界円一意化変数**(Grenzkreis-Uniformisierende)と呼ばれる．

群 Γ は与えられた面によって完全に一意的に決定されるわけではない．なぜなら，単位円の内部をそれ自身へ移す線形変換 T_0 によって t から出て来る変数 t' はいずれも t の代りに採用されうるからである；この場合 Γ は群

$$\Gamma' = T_0^{-1}\cdot\Gamma\cdot T_0$$

に変換される．われわれはつぎの言葉使いを導入する：

“$\mathfrak{E}$ の点”と呼ばれるのはこの単位円の内部にある各点 t であり，“$\mathfrak{E}$ 上の直線”と呼ばれるのは，単位円周と垂直に交わる円周の，単位円の内部にある部分である(単位円の直径もこれらの“直線”のなかに入れる)．“$\mathfrak{E}$ の運動”とは，単位円の内部をそれ自身に移す各線形変換のことであり，“運動”によって互いに移されうる $\mathfrak{E}$ 上の二つの点集合は“合同”であるとする．普通の角計量は保存される．このとき，これらの“点”と“直線”に対して完全なボリアイ-ロバチェフスキーの幾何学，すなわち，その公理系がユークリッド幾何学の公理系から平行線公理の省略によってだけ区別されるような幾何学[1]が成り立ち，したがってわれわれは $\mathfrak{E}$ を非ユークリッド平面と呼ぶことができる．このとき(不等式 $|t|<1$ によって制限された)複素変数 t は，ロバチェフスキー平面の点を表現するのに適した一つの座標であると解釈しなければならない；それはたとえば直交デカルト座標 x, y または複素数によるその結合 $z=x+iy$ がユークリッド平面の点を表現するのと同じ関係にある．t の線形変換により単位円の内部がそれ自身に移るとき，この変換はロバチェフスキー平面に対してもとの t と同じ権利をもつもう一つの座標系をもたらす．いまの解釈によると，

1) ここで説明した平面非ユークリッド幾何学の模型は，Klein によって1871年に発見された模型，すなわち Cayley の計量規定に基づくもの(Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann., 4, 573–625 ページ)ときわめて密接に関係する；それについては Fricke と Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, 第 I 巻, Leipzig 1897, 3–59 ページを参照．非ユークリッド幾何学に関するすぐれた概説を与えるものとしては R. Bonola の著書がある；これは Liebmann により叢書 “Wissenschaft und Hypothese” の第4冊(Die Nicht-Euklidische Geometrie, Leipzig 1908)としてドイツ語で出版されている．

Γ は非ユークリッド平面の一つの運動群，もっと正確にいえば，一つの決まった座標 t によるこのような群の表現とみなされる．単位円の内部をそれ自身に移す変換によって t を t' に置き換えるとき，Γ から得られる線形置換の群 Γ' は，この解釈によると非ユークリッド平面の同じ運動群のもう一つの表現(すなわちもう一つの座標 t' による表現)に過ぎないと考えなければならない．Γ は回転，すなわち $\mathfrak{E}$ の一点を動かさないような $\mathfrak{E}$ の運動を含まない．

したがって(さきに列挙した四つの例外の場合を除けば)各リーマン面にただ一つの，完全に決まった，回転を含まない，不連続な，ロバチェフスキー平面の運動群 Γ が対応する．二つのリーマン面が等角同値になるのは(リーマン自身の表現によれば同じ類に属する，あるいは同じ一つの理想的リーマン面の実現となるのは)，対応する非ユークリッド運動群がロバチェフスキー幾何学の意味で合同となるときであり，またそのときに限る．逆に，回転を含まない不連続な非ユークリッド運動群の一つ一つには，また一つの決まったリーマン面の類が対応する(その代表としては，173ページにおいてつくられた面 $\mathfrak{F}_\Gamma$ をとることができる)[1]．

NE[2] 平面の不連続な運動群 Γ を直観的に表わすために，クラインとポアンカレに従い，Γ に含まれる運動によって互いに移される NE 合同な領域(**基本領域**)をつくり，これらによってこの平面を一重にすきまなく覆うという手段を用いる．この種の分割のうち最も簡単なものはつぎのように考えると手に入れられる．

(NE 距離の定義.) t_1, t_2 が単位円の内部にある任意の互いに異なる点である

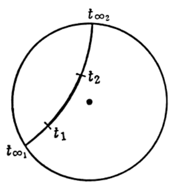


図 27. 非ユークリッド線分.

1) 任意の解析曲線の一意化に関する Koebe の第一の報告の末尾にある注意，Göttinger Nachrichten 1907, 209–210 ページを参照.

2) NE＝非ユークリッド(Nicht-Euklidisch).

とき，これらを NE 直線，すなわちガウス t 平面においては単位円を点 t_{∞_1} および t_{∞_2} で直角に切る円によって結ぼう．この円は t_1, t_2 によって一意に定められるが，上記の点はこの上で $t_{\infty_1}, t_1, t_2, t_{\infty_2}$ の順序に並んでいるとする(図 27).
非調和比

$$d(t_1t_2)=\frac{t_1-t_{\infty_2}}{t_1-t_{\infty_1}}:\frac{t_2-t_{\infty_2}}{t_2-t_{\infty_1}}$$

は実の正の値 >1 をとり，したがってその実対数値

$$r(t_1t_2)=\log d(t_1t_2)$$

は正である．$r(t_1t_2)$ は単位円の内部をそれ自身に移すすべての線形変換に対して不変であり，NE 線分 t_1t_2 が他の NE 線分 $t_1^*t_2^*$ に NE 合同となるのは，$r(t_1t_2)=r(t_1^*t_2^*)$ のときであり，またそのときに限る．さらに，三点 t_1, t_2, t_3 が一つの NE 直線の上にあって，番号の順に並んでいるならば，

$$r(t_1t_2)+r(t_2t_3)=r(t_1t_3)$$

である．これら二つの事情により，われわれは数 $r(t_1t_2)$ を二点 t_1, t_2 の**非ユークリッド距離**と呼ぶのが妥当である；そしてこれにより，NE 平面においては角ばかりでなく，線分をも測ることができる．

Σ_0 は Γ に関して同値な点の一系であり，t_0 は Σ_0 に属する一個の点，t は NE 平面の任意の一点であるとするとき，任意にあらかじめ与えられた大きさ R を t からの距離[1]が越えない範囲にある Σ_0 の点は，Γ の不連続性により有限個に過ぎない．それゆえ Σ_0 の点のうちには，つぎのような点 t_h が一つあるいはいくつか(しかし確かに有限個だけ)存在する：すなわち距離 $r(tt_h)$ は t から系 Σ_0 の点に至るすべての距離のうちで<u>最も小さい</u>；簡潔に私の流儀でいい表わすならば，t は t_h に最も近い．距離 $r(tt_h)$ が t_h と異なる系 Σ_0 のどの点に至る距離<u>よりも</u>本当に<u>小さい</u>ならば，私は t を完全にとりまく近傍を適当に区切り，この近傍の各点もまたやはり t_h に最も近くすることができる．t_h が Σ_0 に属する点の任意の一つであるとき，私は t_h に最も近い点 t を全部あわせて一つの点集合 $\mathfrak{P}_h$ をつくり，t_h をその“中心”とみなす．Σ_0 に属するすべての中心のまわりにつくられる $\mathfrak{P}_h$ は，それらの内点に関して全く異なり，全部あわせると全 NE 平面を覆う．$\mathfrak{P}_h$ は Γ に含まれる運動の一つ，t_0 を t_h

---

1) “距離”という言葉およびそのほかの幾何学的表現はすべて当分のあいだNEの意味に解釈する．

に移す運動によって $\mathfrak{P}_0$ から得られ，したがって $\mathfrak{P}_0$ と NE 合同である．どの点 t に対しても，Γ に関して同値な点が $\mathfrak{P}_0$ において見いだされ，また $\mathfrak{P}_0$ に属する二つの内点は決して互いに同値でない：すなわち $\mathfrak{P}_0$ は基本領域を特徴づける性質をもつ．その上 $\mathfrak{P}_0$ は凸，すなわち $\mathfrak{P}_0$ にある任意の二点を t', t'' とするとき，これらを結ぶ NE 線分 $t't''$ の点もまたすべて $\mathfrak{P}_0$ に属する．線分 t_0t_h の垂直二等分線 $\mathfrak{g}_h$ は，t_0 と t_h から等距離にあるすべての点の軌跡である；t_0 と異なるすべての中心 t_h に対して，われわれはこのような直線 $\mathfrak{g}_h$ を得る．閉集合 $\mathfrak{P}_0$ の境界はこれらの直線に含まれる線分から構成され，$\mathfrak{P}_0$ の内部は，どの直線 $\mathfrak{g}_h$ から見ても t_0 と同じ側にある点の全体から成る．$\mathfrak{g}_h$ の点はすべて t_0 から距離 $\geqq \dfrac{1}{2} r(t_0t_h)$ にあり，中心 t_h のうちに，t_0 からの距離が任意にあらかじめ与えられた限界 $2R$ を越えないものは有限個しか存在しないから，$\mathfrak{P}_0$ の境界に属する線分のうちに，主中心 t_0 から距離 $\leqq R$ にあるものは有限個しかないことがわかる．したがって $\mathfrak{P}_0$ は有限個または無限個の辺をもつ凸多角形であり，その頂点(すなわち系 Σ_0 の三個以上の点から等距離にある点)は有限な範囲に決して集積しない．Fricke にしたがって，$\mathfrak{P}_0$ を Γ に属する**正規多角形**(Normalpolygon)という．正規多角形の辺は二つずつ互いに結びつけられ，それぞれ一対を成す二辺は，Γ に属する一つの運動によって一方から他方へ移ることができる．この際，頂点を共有する二辺が互いに結びつけられることは決して起こらない；そのような頂点があれば，その一辺をもう一つの辺に移す運動の固定点でなければならないからである．$\mathfrak{P}_0$ の一対の辺の一方を他方へ移す運動［すなわち $\mathfrak{P}_0$ をこれと同値な，$\mathfrak{P}_0$ の一辺に沿って隣り合う基本領域 $\mathfrak{P}_h$ に移す運動］から，これらを繰り返したり結合したりすることによって，群 Γ のすべての運動を得ることができる．このことに対する証明をするためには，Σ_0 に属する任意の点 t_h を一つの折れ線によって t_0 と結び，これが多角形分割 $\{\mathfrak{P}_h\}$ の頂点を通らないようにする；そしていまこの分割に属するどの多角形を上の折れ線が順に通過するかということに注意すればよい．$\mathfrak{P}_0$ の頂点1において，$\mathfrak{P}_0$ に同値な多角形 $\mathfrak{P}_h$ が($\mathfrak{P}_0$ 自身もともに数えて)全部で e 個集まっているとすれば，ちょうど e 個の中心が存在して，それらに対して1は最も近くにあり，また $\mathfrak{P}_0$ に属する点のうちには，Γ に関して1に同値な e 個の点，あるいはポアンカレのいい方に従えば，多角形 $\mathfrak{P}_0$ の頂点から成る一つ

の**サイクル**をつくるものが存在する．このような各サイクルの一つに属する頂点にある内角の和は $=2\pi$ である．

群 Γ に対応するリーマン面 $\mathfrak{F}_{\Gamma}$(173 ページ)が閉じるのは，当然のことながら，適当な正の数 R が存在して，NE 平面のどの点についても，中心 t_0 から NE 距離 $\leqq R$ の範囲に，Γ に関して同値な点が少なくとも一個存在するときであり，またそのときに限る．このときはどの点も，それに最も近い系 Σ_0 の点から距離 $\leqq R$ にあり，特に $\mathfrak{P}_0$ は t_0 を中心とする半径 R の NE 円の内部にすっかり含まれる．$\mathfrak{P}_0$ の頂点は有限な範囲に決して集積しないから，この事情のもとではこのような頂点は一般に有限個しか存在しない：すなわち $\mathfrak{P}_0$ は有限辺である．その辺の個数は，二つずつ対になっているために偶数でなければならないから，$=2s$，異なる頂点サイクルの個数は $=c$ とおかれ，その結果 $2\pi c$ が $\mathfrak{P}_0$ の内角の和になる．$\mathfrak{P}_0$ を NE 直線で囲まれた有限個の三角形に分割し，これによって $\mathfrak{F}_{\Gamma}$ の三角形分割を一つつくることができる．D_0 は三角形の個数，K_0 はこの分割にあたって $\mathfrak{P}_0$ の内部に現われる辺の個数，E_0 は $\mathfrak{P}_0$ の内部に現われる頂点の個数，$2e_0$ は $\mathfrak{P}_0$ の辺の上で，多角形の頂点のほかに新たにつけ加えられる頂点の個数(これらの頂点は二つずつ同値であり，$\mathfrak{P}_0$ の周は $2(s+e_0)$ 個の個別的な辺に分割されよう)であるとすれば，凸多角形は単連結であるから，

$$D_0+E_0-K_0=1$$

が成り立つ．他方，$\mathfrak{P}_0$ の分割を $\mathfrak{F}_{\Gamma}$ の三角形分割と考え，その三角形，辺および頂点の個数をそれぞれ $=D, K, E$ としよう．このとき

$$D=D_0, \qquad K=K_0+(s+e_0), \qquad E=E_0+e_0+c$$

を得る．$\mathfrak{F}_{\Gamma}$ の示性数 p は等式

$$2p-2=K-E-D=s-c-1$$

から定められる．

このことは，一つのリーマン面が正規形で与えられたとき(すなわちそれに対応する非ユークリッド運動群 Γ が与えられたとき)，その示性数を見いだす方法を示す；すなわちそれは Γ に属する正規多角形の構造からわかる．なお，非ユークリッド幾何学においては三角形の内角の和が π よりも小さく，しかもその差は三角形の面積に等しいということを考慮すれば，上の等式に一そう洗

練された形を与えることができる. $\mathfrak{P}_0$ を t_0 から $2s$ 個の三角形に分割すれば, いま述べたことにより $\mathfrak{P}_0$ の NE 面積 J は $2\pi(s-c-1)$ になる: すなわち

$$J=4\pi(p-1).$$

各サイクルは少なくとも三個の頂点から成るから,

$$3c \leqq 2s, \qquad c \leqq \frac{2s}{3}, \qquad s-c \geqq \frac{s}{3},$$

したがって

$$\frac{s}{3} \leqq 2p-1;$$

$$2s \leqq 12p-6.$$

示性数 p だけによって定まるこの上の限界は, 正規多角形の辺および頂点の個数に対して有効である.

NE 平面を正規多角形に分割することは, NE 運動群を具体的に表わすのに役立つばかりでなく, このような群を直接に構成するための手段をも提供する[1)].

非ユークリッド平面の運動群(あるいはこれに対応する多様体 $\mathfrak{F}_\Gamma$)において, われわれは最も純粋な, あらゆる偶然の事がらから解放されたリーマン面の理念の具体化に直面する. リーマンの関数論のこの部分において, 全構成の頂点を飾るためには, つぎの問題を解決することが要求されるであろう: リーマン面がその正規形(すなわちそれに対応する非ユークリッド平面の運動群)によって与えられたとき, この面上で一意あるいは多意の非分岐なすべての関数を, ロバチェフスキー平面の点を表わす座標 t の関数として, 完結した解析的な式によって表現すること. この問題はまだ完全には解かれていない; これに対す

1) 正規多角形のほかにも, きわめて重要なものとしてなお "標準多角形(kanonisches Polygon)" がある; これの理論は Fricke によって展開され(Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Leipzig 1897–1912 を見よ), これを使ってこの研究者は, すでに Riemann が述べた命題, すなわち示性数 $p(>1)$ のリーマン面の全体が $(6p-6)$ 次元の多様体をつくるという命題を厳密に定式化し, 証明するのに成功した*). これは最近再び考察の対象として前面に押し出された "連続性の方法" と密接に関連する事項である; 80 年代の始め, Klein と Poincaré はともにこの方法を使って代数形体の一意化の可能性を証明しようと試みた. 162 ページに挙げた Karlsruhe 会議に関する報告, Deutsche Mathematiker-Vereinigung, 1912 を参照.

*) (訳注) リーマン面のモジュラスの理論.

る一つの重要な手掛りはポアンカレによって導入された Θ 級数である[1)].

あらかじめ与えられ，単位円 $|t|<1$ の内部をそれ自身に移す群 Γ が置換

$$t_i^* = tS_i = \frac{\alpha_i t+\beta_i}{\gamma_i t+\delta_i} \qquad (\alpha_i\delta_i-\beta_i\gamma_i=1)$$

$$[i=0, 1, 2, 3, \cdots;\ S_0 \text{ は恒等変換}]$$

から成るとき，たとえば

$$\Theta(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_i t+\beta_i)(\gamma_i t+\delta_i)^3}, \qquad \Theta'(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_i t+\beta_i)^3(\gamma_i t+\delta_i)}$$

はポアンカレの Θ 級数である．これらの級数が絶対かつ一様に収束することを確かめるために，任意の一点 $t_0(|t_0|<1)$ のまわりに半径 a をもつ普通の意味の円板 κ: $|t-t_0|\leqq a$ を十分小さく描き，これと同値な円板 κS_i が互いに出会わないようにする．κ における

$$\left|\frac{dt_i^*}{dt}\right|^2=\frac{1}{|\gamma_i t+\delta_i|^4}$$

の二重積分 J_i は κS_i の(ユークリッドの)面積である；したがって $\sum_{i=0}^{\infty} J_i$ は収束する．t が t_0 からユークリッドの距離 $|t-t_0|\leqq\dfrac{a}{2}$ にあれば，

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi\left|\frac{dt_i^*}{dt}\right|^2\leqq J_i$$

である [101 ページの公式(22), (23)]．したがって

$$\sum\frac{1}{|\gamma_i t+\delta_i|^4}$$

は $t=t_0$ の近傍で一様に収束する．さらに，$|t|\leqq q(<1)$ においては一様に

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{\alpha_i t+\beta_i}{\gamma_i t+\delta_i}\right|=1$$

である(なぜなら同値な点 t_i^* は単位円の境界以外に収束しないからである)；このことから二つの級数 Θ, Θ' の絶対一様収束が確かめられる．Θ は $t=0$ および群 Γ に関してこれに同値なすべての点において 1 位の極をもち，その他の点では正則である；Θ' は上記の点で 3 位の極をもち，その他では正則である．等式

$$\Theta(t)(dt)^2=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(dt_i^*)^2}{t_i^*}$$

1) Poincaré, Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, Acta Mathematica, **1**(1882), 207 ページ.

から，$\Theta(t)(dt)^2$ はこの群の任意の変換 S_i によってそれ自身に移るということが出て来る：すなわち

$$\Theta(tS_i) = (\gamma_i t+\delta_i)^4 \cdot \Theta(t).$$

全く同様にして

$$\Theta'(tS_i) = (\gamma_i t+\delta_i)^4 \cdot \Theta'(t)$$

が得られる.

したがって $\dfrac{\Theta(t)}{\Theta'(t)}$ は群 Γ に関して保型な関数である；これは恒等的に 0 ではなく，しかも $t=0$(およびそれに同値なすべての点)で 2 位の零点をもつ；要約すれば，基礎面 $\mathfrak{F}_\Gamma$ の上で一意の，真性特異点をもたない，定数でない関数である.

一たびリーマン面がその正規形で与えられたのちには，ずっと以前から $p=1$ の場合に楕円関数論を使って行なわれているのと同じように，解析的な式によってこの面上の関数および積分の存在に関する諸定理を導き出すことが可能でなければならないということはこの例から推測される．この目標が一般的に実現されたとき，リーマンの関数論の完全に閉じた構成がはじめて可能となる．このときにはもはや，超越的な方法で(交互処理の方法あるいはディリクレの原理を用いて)関数または積分の存在を証明するのではなく，ただ境界円一意化変数の存在だけを証明することになるであろう；すなわち，リーマン面がまだ正規形で与えられていない場合，まず超越的な方法でその正規形を求める；しかしそのあとは解析的な式を使って，与えられた面に関して非分岐な他のすべての関数のところへ降ってゆくであろう．ここにはなお研究に値する問題が将来のために横たわっている.

§21. リーマン面からそれ自身への等角写像.

NE 平面の運動群について，それが**無限小変換**を含むというのは，恒等変換にいくらでも近い運動がその群のなかに存在するときである．不連続な運動群，たとえば Γ は確かに無限小変換を含まない．ところでこの定理については逆も成り立つ：

<u>NE 運動群が不連続であるのは，それが無限小運動を含まないときであり，</u>

またそのときに限る.

証明にはいままでのように複素座標 t を利用する．線形変換 $T: t\to t^*$ は t 球面において一般には二つの異なる固定点 τ', τ'' をもち，このときにはつぎのように書かれる：

$$(53)\qquad \frac{t^*-\tau''}{t^*-\tau'}=\mu\cdot\frac{t-\tau''}{t-\tau'};$$ [1)]

定数 μ は T の**乗数**と呼ばれる．T が単位円の内部をそれ自身に移すときには，二つの場合が起こりうる：

第一は，τ', τ'' がともに単位円の境界にある場合で，このとき μ は正である(**双曲型の変換**)；

第二は，τ', τ'' が単位円に関して互いに鏡像の位置にあり，τ' がその内部にある場合；このとき $|\mu|=1$ である(**楕円型の変換**)．NE 平面において T は τ' のまわりの回転であり，方程式 $\mu=e^{i\varphi}$ により 2π の整数倍を除いて定められる実数 φ が T の回転角である.

双曲型変換と楕円型変換のあいだには，過渡的な場合として，ただ一つの固定点 τ' をもつ**放物型の変換**が入りこむ．これが単位円の内部をそれ自身に移すときには，

$$(54)\qquad \frac{1}{t^*-\tau'}=\frac{1}{t-\tau'}+\frac{ib}{\tau'}\qquad (|\tau'|=1,\ b \text{ は実数})$$

という形をもつ.

われわれの証明はつぎの補助定理によってささえられる：NE 平面内の二つの点列

$$t_n,\ \ t_n^*\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

は同じ点 $t_0(|t_0|<1)$ に収束し，さらに NE 運動 T_n は t_n を t_n^* に移し，また t_0 の近傍のうちに，どの運動 $T_n(n=1,2,3,\cdots)$ の固定点をも含まないものがあれば，T_n は恒等変換に収束する.

$\tau_n'(|\tau_n'|\leqq 1)$，$\tau_n''$ が T_n の二つの固定点であるとすれば(それらは一致してもよい)，仮定により適当な正の数 l が存在して，すべての n につき

---

1) $\tau''=\infty$ のとき，これは $\dfrac{1}{t^*-\tau'}=\mu\cdot\dfrac{1}{t-\tau'}$ を意味する.

$$|t_0-\tau_n'|,\quad |t_0-\tau_n''|>\frac{3l}{2}$$

となるはずである.

$$|t_n-t_n^*|=\varepsilon_n$$

とおくとき，私はすべての n に対して

$$|t_n-t_0|,\quad |t_n^*-t_0|<\frac{l}{2},\quad \text{したがって}\quad \varepsilon_n<l$$

と仮定することが許される．このとき差

$$|t_n-\tau_n'|,\ |t_n-\tau_n''|,\ |t_n^*-\tau_n'|,\ |t_n^*-\tau_n''|$$

は四つとも $>l$ である．T_n が放物型でなければ，

$$\frac{t^*-\tau_n''}{t^*-\tau_n'}=\mu_n\cdot\frac{t-\tau_n''}{t-\tau_n'} \tag{55}$$

という形をとる．これに $t=t_n$, したがって $t^*=t_n^*$ を代入すれば，

$$\mu_n=\frac{t_n^*-\tau_n''}{t_n-\tau_n''}:\frac{t_n^*-\tau_n}{t_n-\tau_n'}=\left(1+\frac{t_n^*-t_n}{t_n-\tau_n''}\right):\left(1+\frac{t_n^*-t_n}{t_n-\tau_n'}\right)$$

が得られる．これから

$$|\mu_n-1|\leqq\frac{2\varepsilon_n}{l-\varepsilon_n} \tag{56}$$

という評価が導かれる．(55)の代りに私は

$$\frac{1}{t^*-\tau_n'}=\lambda_n+\mu_n\cdot\frac{1}{t-\tau_n'}\qquad (\lambda_n\ \text{は定数}) \tag{57}$$

と書くこともできる; なぜなら固定点 τ_n' をもつ線形変換は，いずれもこの形をとるにちがいないからである．変換 T_n が放物型であるときにも，私はそれを(57)の形に書くことができる; このときには特に $\mu_n=1$ であり，それゆえ(56)がやはり成り立つ．われわれは極限の等式

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n=1$$

を得る．再び $t=t_n$, $t^*=t_n^*$ を(57)に代入すれば,

$$\lambda_n=\frac{t_n-t_n^*}{(t_n-\tau_n')(t_n^*-\tau_n')}-\frac{\mu_n-1}{t_n-\tau_n'},$$

$$|\lambda_n|\leqq\frac{\varepsilon_n}{l^2}+\frac{|\mu_n-1|}{l},\qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$$

が得られる．最後に(57)を本来の形

$$t^* = \frac{\alpha_n t + \beta_n}{\gamma_n t + \delta_n}$$

に戻せば,

$$\alpha_n = 1 + \lambda_n \tau_n', \qquad \beta_n = \tau_n'(\mu_n - 1 - \lambda_n \tau_n'),$$
$$\gamma_n = \lambda_n \qquad\qquad \delta_n = \mu_n - \lambda_n \tau_n'$$

という値が得られ，これらは恒等置換 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の対応する係数と比べて

$$|\mu_n - 1| + |\lambda_n|$$

より少ししかずれていない．こうして補助定理は証明された．

ここで Γ^* は無限小変換を含まない NE 運動群であるとし，τ は NE 平面の点で，Γ^* に属する一つの回転の固定点であるとしよう．Γ^* に含まれ，固定点 τ をもつ回転をすべて S_τ で表わす；これらの全体はそれだけで一つの群をつくる．S_τ の回転角 φ を条件 $0 \leqq \varphi < 2\pi$ によって正規化すれば，無限小変換を含まないということにより，S_τ のうちには最小の回転角 $\varphi_0 > 0$ をもつ S_τ^0 が一つ存在する．各 S_τ の回転角は φ_0 の整数倍である；もしそうでなければ，整数 k を適当に選ぶことによって，S_τ^0 よりも小さい回転角をもつ変換 $S_\tau \cdot (S_\tau^0)^{-k}$ をつくることができるからである；それゆえ S_τ^0 は S_τ 全体から成る群の“原始(primitiv)”変換であり，これのベキをとることによって他のすべてのものが得られる．条件

$$h\varphi_0 \leqq 2\pi < (h+1)\varphi_0$$

によって整数 h を決めれば，$h\varphi_0 = 2\pi$ でない限り，$(S_\tau^0)^{h+1}$ は S_τ^0 より確かに小さい回転角 $(h+1)\varphi_0 - 2\pi$ をもつ．したがって $\varphi_0 = \dfrac{2\pi}{h}$ でなければならず，h は有限巡回群 (S_τ) の位数であり，この群は回転

$$(S_\tau^0)^1, \quad (S_\tau^0)^2, \quad (S_\tau^0)^3, \quad \cdots, \quad (S_\tau^0)^h = 1$$

から成る．

Γ^* のなかに現われる回転の固定点は有限な範囲に決して集積しない．実際，$\tau\,(|\tau| < 1)$ がこのような集積点であると仮定し，

$$S_n \quad \left(\text{回転角} = \frac{2\pi}{h_n}\right) \qquad [n = 1, 2, 3, \cdots]$$

は Γ^* から選ばれた原始回転の列で，それらの固定点 τ_n はすべて異なり，し

かも τ に収束するとすれば，論理上つぎの二つの場合が起こりうる：

1. 位数 h_n がすべての n に対して一定の限界より下にとどまる場合．このときには S_n のうちに同じ位数 h をもつものが無限に存在する；これらを変換 $S_1', S_2', S_3', \cdots$ としよう．n を限りなく大きくするとき，$S_n'S'_{n+1}{}^{-1}$ は無限小になる．それゆえこの場合は除外される．

2. 位数 h_n が一定の限界より下にとどまらない場合．このときには S_n のなかから適当な列 S_n' を選び出し，対応する位数が ∞ に，したがって回転角が 0 に収束するようにできる；このこともまた，Γ^* のなかに無限小の演算が含まれないということに矛盾する．

これだけ確かめられると，Γ^* に関して同値な点の系が有限な範囲に集積点をもたないということをも，われわれはいま示すことができる．実際，t_0 $(|t_0|<1)$ が同値な点の列 $t_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ の極限であること，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$$

を仮定し，Γ^* に属する運動で，t_n を t_{n+1} に移すものを S_n としよう．私は t_0 のまわりに一つの近傍 $\mathfrak{U}_0$ をとり，場合により t_0 を除けば，$\mathfrak{U}_0$ のなかには Γ^* に属するどの回転の固定点も含まれないようにする．補助定理によれば，有限個の指数 n に対してだけ S_n の固定点 $\tau_n'(|\tau_n'|\leqq 1)$ が $\mathfrak{U}_0$ の外部にある；したがって或る n 以降では $\tau_n'=t_0$ でなければならないが，このことはすでに $n=1$ 以降から成り立っていると仮定しても，何ら制限を加えたことにならない．このときは，t_0 のまわりの，Γ^* に含まれる回転によって，すべての t_n が t_1 から得られる；ところがこのような回転によって，私は t_1 を単に有限個の異なる位置にしか移すことができない．集積点があるという仮定はこうして矛盾に導かれ，はじめに(181 ページ)述べた定理の証明が得られた．

これだけの準備を終えたところで，われわれはいま，われわれの記述の最後にあたるこの節が本来の対象とするところにはいろう．ここでとり扱うのは，一つのリーマン面 $\mathfrak{F}$ がそれ自身に移されるような，両側から一意の等角写像を求める問題である．これらの写像は群をつくり，この群がリーマン面 $\mathfrak{F}$ の理論に対してもつ意味は，たとえば運動群が計量幾何学に対してもつ意味と同様である；それゆえ，本質的にはクラインに由来するつぎの定理を定式化するとき，われわれは原理的に重要な一つの事実を述べているのである：

一つのリーマン面からそれ自身への等角写像の群は，つぎの七つの例外の場合を除けば，つねに不連続である：$\mathfrak{F}$=1)全球面，2)一点を除いた球面，3)二点を除いた球面，4)球面頭巾状領域，5)一点を除いた球面頭巾状領域(すなわち頭巾から中心を除いたもの)，6)(拡がりのある円のあいだの)球面帯状領域[1]，7)示性数1の閉リーマン面.

証明[2]：$\tilde{\mathfrak{F}}$ は $\mathfrak{F}$ の普遍被覆面，t は $\tilde{\mathfrak{F}}$ を単位円の内部へ等角に写像する境界円一意化変数，Γ はリーマン面 $\mathfrak{F}$ に対応する NE 運動群を表わすとしよう：単位円内部の代りに t 球面または無限 t 平面が現われる場合は，ここで除外することができる；それらの場合にはわれわれの定理がもともと成り立たないからである：例外の場合1, 2, 3, 7. C は $\mathfrak{F}$ からそれ自身への等角写像であって，点 $\mathfrak{p}_0$ を $\mathfrak{p}_0'$ に移すとしよう. $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ は $\mathfrak{p}_0$ の真上にある $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の一点，$\tilde{\mathfrak{p}}_0'$ は $\mathfrak{p}_0'$ の真上にある $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の一点であるとする. $\tilde{\mathfrak{F}}$ は単連結であるから，つぎの条件を満たすように $\tilde{\mathfrak{F}}$ をそれ自身へ移し，両側から一意で領域連続な写像 $\tilde{C}$ がただ一つ存在する：

1. $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ は $\tilde{\mathfrak{p}}_0'$ に移り，
2. $\tilde{\mathfrak{F}}$ 上の各点 $\tilde{\mathfrak{p}}$ は点 $\widetilde{\mathfrak{p}C}$ に移り，その射影点 $\mathfrak{p}C$ は $\tilde{\mathfrak{p}}$ の射影点 $\mathfrak{p}$ から写像 C によって得られる.

$\tilde{C}$ もまた等角であり，それゆえ t 平面においては，単位円の内部をそれ自身へ移す線形変換 T，しかも Γ に関して同値な点の系をいずれもそのような点の系へ移す変換として現われる. 最後に述べた性質は等式

$$T\cdot\Gamma\cdot T^{-1}=\Gamma$$

によって表わされ，この式は T が Γ と可換であること，すなわち，Γ に属する各置換 S に対して，それから“変換された”置換 TST^{-1} もまた Γ に属することを意味する. また逆に，Γ と可換で，$|t|<1$ をそれ自身に移す線形置換 T は，$\mathfrak{F}_\Gamma$ からそれ自身への等角写像を与えることも明白である. Γ と可換な NE 平面の運動の全体は明らかに一つの群 Γ_c をつくり，これは Γ を部分として含む. この群 Γ_c の不連続性を証明しようというのである；そのためには，

1) これらは帯状部分の幅に応じて無限に多くの，本質的に異なるリーマン面をつくる.

2) この証明は Poincaré による：Acta Mathematica, 7(1885), 16–19 ページ. Poincaré はここでただ閉じたリーマン面にだけ注目しているとはいえ，彼の証明は開いた面にも一語一語そのままあてはまる.

本節の始めに述べた定理によって，Γ_c のなかに無限小演算が含まれていないことを知ればよい.

S, T が単位円の内部をそれ自身に移す任意の二つの線形変換であるとき，T によって S の固定点に移される二点は，変換

$$TST^{-1} = S'$$

の固定点である．それゆえ，S' が S と同じ固定点をもつとするならば，T は S の二つの固定点の一つ一つをそれ自身に移すか［すなわち S が放物型でないときは S と同じ固定点をもち，S が放物型であるときは S の固定点と一致する固定点を少なくとも一つもつか］，または(放物型でない)変換 S の二つの固定点 σ', σ'' を互いに交換する——すなわち σ' を σ'' に，σ'' を σ' に移す——ものでなければならない．あとの結果をひき起こすことは，(54)からわかるように，放物型の T には不可能であり，放物型でない T，すなわち(53)において，$\mu^2=1$，したがって $\mu=-1$ のとき，すなわち T が回転角 π をもつ楕円型変換であるときだけ可能である．特に S が T と可換，すなわち

$$TS = ST, \qquad TST^{-1} = S$$

であるとするならば，それはつぎに挙げる場合にだけ可能である：

Ⅰ．変換 S と T はいずれも放物型でなく，しかも同じ固定点をもつ；あるいは

Ⅱ．変換 S と T はいずれも放物型であり，しかも同じ固定点をもつ；あるいは

Ⅲ．S と T は回転角 π の楕円型変換である；あるいは

Ⅳ．二つの変換 S, T の一方が恒等変換である.

Γ が恒等変換だけから成るときは，$\mathfrak{F}$ は単位円の内部に，あるいは同じことであるが，球面頭巾状領域に等角同型である：例外の場合 4.

S は Γ から任意に選ばれた恒等変換とは異なる置換であるとき，われわれの主張とは反対に，Γ_c からとられた演算 $T_n \neq 1$ の列が恒等変換 1 に収束すると仮定すれば，$T_nST_n^{-1}$ とともに $T_nST_n^{-1}S^{-1}$ もまた Γ に含まれる．ところがあとの演算は T_n と同じように，n が限りなく大きくなるとき恒等変換に収束し，しかも Γ は無限小変換を含まないのであるから，或る有限の n からさきは

$$T_n S T_n^{-1} S^{-1} = 1,$$

すなわち S は T_n と可換である．このことが起こりうる場合として，さきに四つの場合を挙げたが，S は楕円型ではないから，ここで問題になるのは場合 I と II だけである．これから得られる結果を，群 Γ からとりうるすべての演算 $S \neq 1$ に適用すればわかるように，われわれにはつぎの二つの可能性しか残されていない：

I．Γ に属するすべての演算が双曲型であり，しかも同じ二つの固定点をもつ；それらは点 $+i$ と $-i$ に置くことができる；

II．Γ に属するすべての演算が放物型であり，しかも同じ固定点をもつ；それは点 i にあるとしてよい．

場合 I：写像

$$z = \log\frac{i-t}{i+t}$$

によって t 平面の単位円の内部は $z=(x+iy)$ 平面の平行帯状領域 $-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}$ に移り，Γ は x 軸に平行な移動の群に移る；すなわち Γ は

(58) $$z^* = z + n\cdot\frac{2\pi}{a} \qquad \begin{bmatrix} a \text{ は正の定数;} \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{bmatrix}$$

という形をとる．このとき $\mathfrak{F}_\Gamma$ は

$$w = e^{aiz}$$

によって円環領域

$$e^{-\frac{1}{2}a\pi} < |w| < e^{\frac{1}{2}a\pi}$$

へ両側から一意に写像され，最後にこの領域は立体射影により，赤道を中心線とする球面帯状領域に変えられる：例外の場合 6.

場合 II：写像

$$z = \frac{2}{t-i} - i \qquad (z = x+iy)$$

によって t 平面の単位円の内部は上半平面 $y>0$ に移り，Γ は x 軸に平行な移動の群に移る；それゆえ Γ はここでも(58)の形をとり，$w=e^{aiz}$ は $\mathfrak{F}_\Gamma$ を w 平面の一点を除いた単位円：

$$0 < |w| < 1$$

に変える：例外の場合5.[1]

こうして主要定理は完全に証明され，また同時にわれわれは，重要な例に即してリーマン面の正規形 $\mathfrak{F}_r$ の有効さを学ぶ機会を見いだした．除外された七つの場合に，この面からそれ自身への等角写像から成る連続群が実際に存在することは自明である．またこれらの群を完全に列挙することも容易である．

示性数 $p>1$ をもつ閉じたリーマン面は，それ自身への等角写像を有限個しか許さない[2]．なぜならこの群に関して同値な点の一系は，閉じた面上に集積点をもつことができず，したがってこれを構成する点は有限個しかありえないからである．

1)（訳注） この証明のなかでは'例外の場合'に番号が付けられている．これと対照するため，186ページの始めに書かれた番号1)－7)は原文にない．

2) H. A. Schwarz によって最初に提出されたこの一そう特殊な定理に対しては，ほかにもいくつかの代数的な証明がある：一つは Weierstraß(1875)のもので，これは1895年にはじめて公表された(全集，第II巻，235-244ページ)；一つは Noether のもの(Math. Ann., **20**, 59-62ページ，および **21**, 138-140ページ；1882)，また一つは Hurwitz のもの(Math. Ann., **41**, 403-411ページ；1893)である．

訳者のあとがき

この翻訳にあたってまず苦慮したのは，原書の表題 “Die Idee der Riemannschen Fläche” のとり扱いであった．‘Idee’ に対する訳語としては ‘理念’ がある(出　隆先生の御教示によれば，この語を ‘理想観念’ の縮約として最初に用いられたのは桑木厳翼博士である)．しかしながら ‘理念’ という言葉は近ごろ日常語として用いられ，その際は必ずしも原義を表わさない．このことから予想される誤解を避けるために，訳書名は単に ‘リーマン面’ とした．

著者ヘルマン・ワイル(1885-1955)については，岩波数学辞典，第2版，810ページを参照されたい．

原著が出版されたとき，ワイルは27歳，ゲッチンゲン大学の私講師であった．原著の成立過程と著者の意図は，‘緒言および序文’(訳書 vii～xiii ページ)に詳しく述べられている．

‘この学問上の仕事が，業績として特に高く評価されることはおそらくないであろう’ という著者の言葉にもかかわらず，リーマン面を(今日の用語によれば)1次元複素多様体として明確にとらえ，この概念に基づいて古典代数関数論を再編成した著者の ‘仕事’ のなかに秘められた豊かな可能性は，1949年に発表された小平邦彦氏の壮大な業績，多次元多様体上のポテンシャル論(91ページの訳注を参照)によって十分明らかにされたといえよう．

刊行から60年を経た現在においても，原著がなお新鮮な魅力を失わないのは，そこに展開されている内容の先駆的な性格によることはいうまでもない．しかしながら(少なくとも訳者にとって)原著のもつ魅力の一半はその力強い表現にある．‘論理の糸’ から編まれた ‘網’ の背後にあって ‘単純’ かつ ‘崇高’ なもの，‘本来のイデー’ をあくまでも伝えようとする著者の情熱は――その根底にあると見られるプラトン哲学の影響は別としても――読む者の心を打つ．

拙い訳文が原著の格調を十分伝ええなかったことについて，訳者は著者と読者の宥恕を乞わなければならない．

原著の第2版は1923年に，第3版は1955年に刊行された．第3版には G.

R. Maclane による英訳がある(The Concept of a Riemann Surface, Addison-Wesley). 第2版の本文は初版のままであるが, 巻末に‘訂正と補注’および‘付録: 双側の面における交点数の理論の厳密な基礎づけ’がつけ加えられている. これに対して第3版では, 上記付録の内容が本文に組みこまれると同時に, 本文そのものも全面的に書き直されている.

円熟した筆による第3版もまた独特の風格をもつけれども, これは同じ著者によるもう一つの‘作品’とみなすのが一そう適切であろう. その脚注の一つに(verstreut という用語と関連して)ヘッセの詩の一節が引用されている:

「夏の夜はまばらにその星くずを散らし,
若い日の思い出は, 月影さやかな群葉に匂う…」

改訂の筆をとる著者の心境がこの詩句に托されているのであろう. この版が刊行された年, ワイルは世を去った.

この本を読むために多くの予備知識を必要としないことは‘緒言および序文’に述べられているとおりである. 特に初学者に対するすぐれた解説書として,

能代　清, 解析接続入門, 共立出版, 1964

を挙げておきたい.

また, 高度の読者には

岩澤健吉, 代数函数論, 岩波, 増補版, 1973;
能代　清, 近代函数論, 岩波, 1954;
楠　幸男, 函数論, 朝倉, 1973

などがある. また個別的な主題に関する新しい文献については, 岩波数学辞典を参照されたい(そのための配慮はわずかながら‘訳注’に払われている). さらに, この本の内容とは直接に関連しないけれども, 今世紀初頭におけるゲッチンゲンの雰囲気は, Reid の‘ヒルベルト’(彌永健一訳, 岩波, 1972)に生き生きと描かれている.

終わりにあたって, 彌永昌吉先生と能代清先生に深い感謝を捧げたい. 彌永先生は私にこの訳業を——それは私にとって困難であると同時に楽しい仕事であった——慫慂されるとともに, いくつかの基本的な助言を与えられた. また,

訳語の選択に際して，訳者は能代先生の諸著作から多くの示唆を得た．

さらに，この訳書が世に出るまでには，荒井秀男氏はじめ岩波書店編集部の方々のなみなみならぬ努力があった．Teubner 書店に対する原著者の言葉は，そのまま岩波書店に対する訳者の謝辞である．

1974年2月

田 村 二 郎

事 項 索 引

あ 行

か 行

さ 行

た 行

や 行

ら 行

わ 行

リーマン面　H. ワイル著

1974年5月27日　第1刷発行
2003年5月23日　第10刷発行

訳　者　田村二郎（たむらじろう）

発行者　大塚信一

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋2-5-5
電　話　案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・精興社　製本・三水舎

ISBN 4-00-006126-7　　Printed in Japan